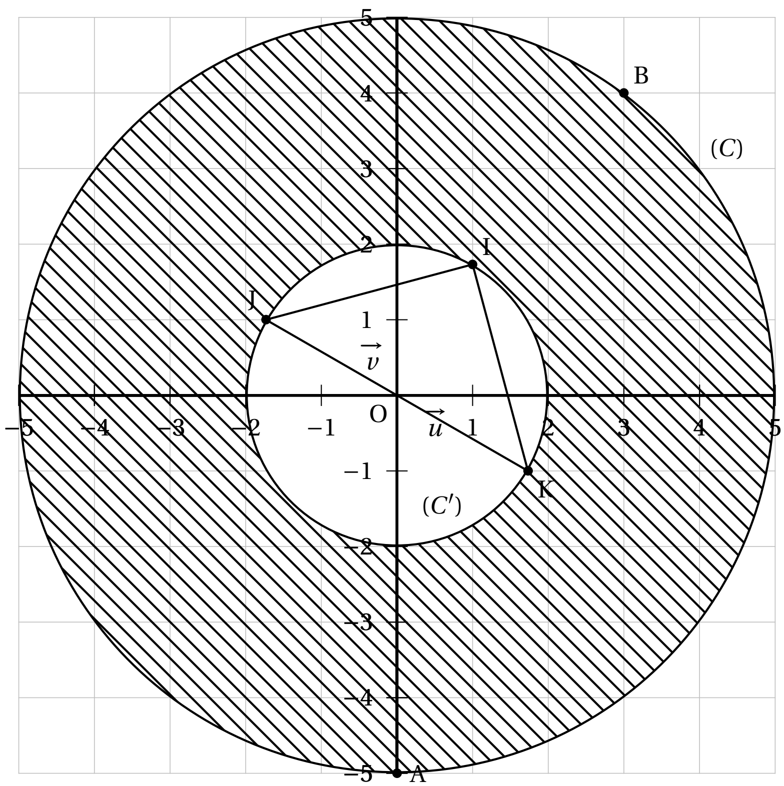
∽ Corrigé du baccalauréat STI Antilles–Guyane septembre 2009 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** $z^2 - 6z + 25 = 0 \iff (z-3)^2 - 9 + 25 = 0 \iff (z-3)^2 + 16 = 0 \iff (z-3)^2 - (4\text{i})^2 = 0 \iff (z - 3 + 4\text{i})(z - 3 - 4\text{i}) = 0.$

   L'équation a coefficients entiers a deux solutions complexes conjuguées : $3+4\text{i} = z_{\text{B}}$ et $3-4\text{i}$.

   b.



2. **a.** On a de façon évidente $|z_{\text{A}}| = 5$ et $|z_{\text{B}}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

   Donc OA = OB = 5, ce qui montre que les points A et B appartiennent au cercle centré en O et de rayon 5.

   b. Voir la figure

3. **a.** $z_{\text{J}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + \text{i}.$

   b. $|z_{\text{I}}| = \sqrt{1+3} = 2$;

   $\left|z_{\text{J}}\right| = 2$;

   $|z_{\text{K}}| = \left|z_{\text{J}}\right| = 2.$

   Les trois nombres ont le même module, donc I, J et K appartiennent au cercle centré en O de rayon 2.

4. **a.** Voir la figure ; $\left(\mathcal{C}'\right)$ est le cercle de centre O de rayon 2 $\text{IJ}^2 = \left|z_{\overrightarrow{\text{IJ}}}\right|^2 = |-\sqrt{3} + \text{i} - (1 + \text{i}\sqrt{3})|^2 = (-1-\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2 = 8.$

   $\text{IK}^2 = \left|z_{\overrightarrow{\text{IJ}}}\right|^2 = |\sqrt{3} - \text{i} - (1 + \text{i}\sqrt{3})|^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (-1-\sqrt{3})^2 = 8.$

$JK^2 = \left|z_{\overrightarrow{JK}}\right|^2 = |\sqrt{3} - i - (-\sqrt{3} + i)|^2 = (2\sqrt{3})^2 + (-2)^2 = 12 + 4 = 16.$

Donc IJ = IK : le triangle est isocèle en I ;

$IJ^2 + IK^2 = JK^2 \iff$ IJK est rectangle en I d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Le triangle IJK est rectangle isocèle en I.

b. Les points de (E) (couronne circulaire sont les points situés entre les cercles (C) et (C').

EXERCICE 2 **4 points**

1.

	Nombre de jours où il y a un dégât des eaux	Nombre de jours où il n'y a pas de dégât des eaux	TOTAL
Nombre de jours où l'alarme se déclenche	4	10	14
Nombre de jours où l'alarme ne se déclenche pas	1	485	486
TOTAL	5	495	500

2. a. D'après le tableau $p(\text{A}) = \dfrac{14}{500} = \dfrac{7}{250}$.

b. Soit Le système d'alarme est mis en défaut 10 + 1 = 11 fois.

$p(\text{B}) = \dfrac{11}{500}$.

c. Il faut calculer $p_{\text{A}}(\text{E}) = \dfrac{p(\text{A} \cap \text{E})}{p(\text{A})} = \dfrac{\frac{4}{500}}{\frac{14}{500}} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7}$.

3. a. Tableau de la loi de probabilité :

x_i	0	150	1 000	3 000
$p\,(\text{X} = x_i)$	$\dfrac{97}{100}$	$\dfrac{1}{50}$	$\dfrac{1}{125}$	$\dfrac{1}{500}$

b. Le coût moyen journalier de cette assurance est égal à l'espérance mathématique de la variable X.

$\text{E(X)} = 0 \times \dfrac{97}{100} + 150 \times \dfrac{1}{50} + 1\,000 \times \dfrac{1}{125} + 3\,000 \times \dfrac{1}{500} = 3 + 8 + 6 = 17$ (euros).

PROBLÈME **11 points**

PARTIE A : étude graphique d'une fonction

1. a. On a $f(x) = \dfrac{e^{2x}\,(2 - 4e^{-x})}{e^{2x}\left(1 - 4e^{-x} + 5e^{2x}\right)} = \dfrac{2 - 4e^{-x}}{1 - 4e^{-x} + 5e^{2x}}$, car $e^{2x} \neq 0$.

On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Géométriquement, ceci signifie que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini.

Voir la figure

b. • $f(\ln 2) = \dfrac{2e^{2\ln 2} - 4e^{\ln 2}}{e^{2\ln 2} - 4e^{\ln 2} + 5} = \dfrac{2e^{\ln 4} - 4e^{\ln 2}}{e^{\ln 4} - 4e^{\ln 2} + 5} = \dfrac{2 \times 4 - 4 \times 2}{4 - 8 + 5} = \dfrac{0}{1} = 0$

• Autre méthode $f(x) = 0 \iff 2e^{2x} - 4e^{x} = 0 \iff e^{x} = 2 \iff x = \ln 2$ d'après la croissance de la fonction logarithme népérien.

2. **a.** $f(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant \ln 2$; $(\mathscr{C})$ est sous l'axe des abscisses ;
   $f(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant \ln 2$
   b. Le nombre dérivé en 0 est égal à la pente de la tangente (BM) ; cette pente est égale à -1, donc $f'(0) = -1$.

PARTIE B : étude d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ln 5$.
   Géométriquement ceci signifie que la droite d'équation $y = \ln 5$ est asymptote horizontale à (Γ) au voisinage de moins l'infini.
2. **a.** En factorisant e^{2x}, on peut écrire $\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 5 = \mathrm{e}^{2x}\left(1 - \mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{-2x}\right)$; donc
   $F(x) = \ln\left[\mathrm{e}^{2x}\left(1 - \mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{-2x}\right)\right] = \ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right) + \ln\left[1 - \mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{-2x}\right] = 2x + \ln\left[1 - \mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{-2x}\right]$.
   b. En utilisant l'écriture que l'on vient d'obtenir :
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln\left[1 - \mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{-2x}\right] = \ln 1 = 0$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$, on a finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.
   Comme $F(x) - 2x = \ln\left[1 - \mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{-2x}\right]$ qui a pour limite 0 en $+\infty$, on a
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) - 2x = 0$.
   c. Géométriquement le résultat précédent signifie que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à (Γ) au voisinage de plus l'infini.
3. **a.** Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 5} = f(x)$.
   La fonction f est la dérivée de la fonction F.
   b. Comme $\mathrm{e}^{\ln 2} = 2$ et $\mathrm{e}^{2\ln 2} = \mathrm{e}^{\ln 2^2} = \mathrm{e}^{\ln 4} = 4$, on a
   $F(\ln 2) = \ln\left(\mathrm{e}^{2\times 2} - 4\mathrm{e}^{2} + 5\right) = \ln(4 - 8 + 5) = \ln 1 = 0$.
   c. On a vu dans la partie A que $f(x) = F'(x) < 0$ si $x < \ln 2$: la fonction F est donc décroissante sur $]-\infty~;~\ln 2]$.
   De même $f(x) = F'(x) > 0$ si $x > \ln 2$: la fonction F est donc décroissante sur $[\ln 2~;~+\infty[$.
   D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$F(x)$	$\ln 5$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

4. La calculatrice donne :

x	-2	-1	0	0,5	1	2
$F(x)$	1,50	1,30	0,69	0,12	0,42	3,40

5. Voir plus bas

PARTIE C : calcul d'une aire

1. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{\ln 2}^{2} = F(2) - F(\ln 2) = \ln\left(\mathrm{e}^{2\times 2} - 4\mathrm{e}^{2} + 5\right) - 0 = \ln\left(\mathrm{e}^{4} - 4\mathrm{e}^{2} + 5\right)$.
2. On a vu que pour $x \geqslant \ln 2$, $F(x) \geqslant 0$; donc l'intégrale précédente est égale (en unité d'aire) à l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \ln 2$ et $x = 2$. L'unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4$ cm^2 ; donc l'aire du domaine est égale à :
   $4 \times \ln\left(\mathrm{e}^{4} - 4\mathrm{e}^{2} + 5\right) \approx 13,61$ cm^2

ANNEXE à rendre avec la copie