Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Métropole 21 juin 2012 Génie mécanique, génie des matériaux

EXERCICE 1 **5 points**

1. A est dans le deuxième cadran et B dans le troisième : réponse b.
2. On a $\dfrac{z_A}{z_B} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{4\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{9\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{-i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$. Réponse c.
3. On a $z_A = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$, donc $A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}~;~\dfrac{1}{2}\right)$.

   De même $z_B = \cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $B\left(-\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   On a donc $AB^2 = \left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3+1-2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{+3+1-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$.

   Donc $AB = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Réponse d.
4. $z_C = z_B^2 = e^{-i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Réponse b.
5. On a $\delta = 1-4 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$: l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; ce sont les affixes de z_B et $\overline{z_B}$. Réponse c.

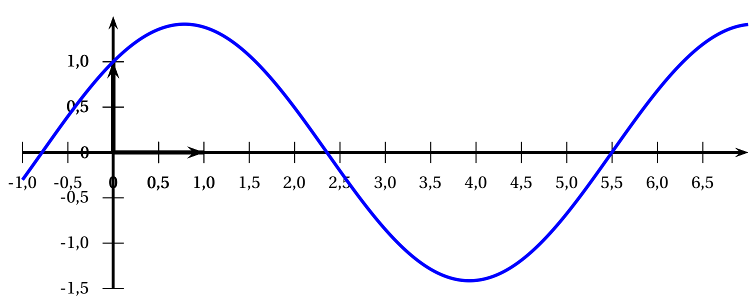
EXERCICE 2 **4 points**

1. L'équation caractéristique $r^2+1=0$ a pour solution i et $-$i.

   On sait que la solution générale de cette équation est $f(x) = A\cos x + B\sin x$.
2. On doit avoir $\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 1\\ f'(0) & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A+0 & = & 1\\ -0+B & = & 1\end{array}\right.$.

   Donc $f(x)\cos x + \sin x$.
3. $$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

   et une représentation graphique de cette fonction est donnée ci-dessous.



   a. Cette équation n'a pas de solution.

   b. La courbe coupe la droite d'équation $y=1$ en deux points d'abscisse 0 et à peu près $\frac{\pi}{2}$.

   c. L'équation a deux solutions.

4. $f(x) = 0$ ou $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ soit $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

On a donc $x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{2}$ d'où finalement :

$x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

PROBLÈME **11 points**

Partie A - Calcul de volume

1. $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f'(0) = 0$, $f'(1) = 0$.

2. On cherche à déterminer ces deux nombres.

a. D'après la question précédente, a et b doivent vérifier le système :

$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 1\\ f(1) & = & 2\\ f'(0) & = & 0\\ f'(1) & = & 0\end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & 1\\ a+b & = & 2\\ 0 & = & 0\\ 3a+2b & = & 0\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & 2\\ 3a+2b & = & 0\end{array}\right.$

b. De la première équation on déduit que $b = 2 - a$ et en remplaçant dans la seconde :
$3a + 2(2 - a) = 0$ d'où $a + 4 = 0$, $a = -4$ et donc $b = 2 - (-4) = 6$.
O a donc $f(x) = -4x^3 + 6x^2 + 1$ sur $[0\,;\,1]$.

$$[f(x)]^2 = 4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1$$

Une primitive de la fonction d'expression $[f(x)]^2$ est $4\dfrac{x^7}{7} - 12\dfrac{x^6}{6} + 9\dfrac{x^5}{5} - 4\dfrac{x^4}{4} + 6\dfrac{x^3}{3} + x$.

3.

$$\pi\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

a. D'après le résultat précédent :

$\pi\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \pi\left[4\dfrac{x^7}{7} - 12\dfrac{x^6}{6} + 9\dfrac{x^5}{5} - 4\dfrac{x^4}{4} + 6\dfrac{x^3}{3} + x\right]_0^1 =$

$4\dfrac{1^7}{7} - 12\dfrac{1^6}{6} + 9\dfrac{1^5}{5} - 4\dfrac{1^4}{4} + 6\dfrac{1^3}{3} + 1 = \dfrac{4}{7} - 2 + \dfrac{9}{5} - 1 + 2 + 1 = \dfrac{4}{7} + \dfrac{9}{5} =$

$\dfrac{20 + 63}{7 \times 5} = \dfrac{83}{35} \approx 2,3714$, soit 2,371 m^3 au dm^3 près.

b. Le rayon du cylindre est égal à 2, donc son volume est : $\pi \times 2^2(4 - 1) = 12\pi$.

Le volume du conteneur est donc $12\pi + \dfrac{83}{35} \approx 40,0705$ soit 40,071 m^3 au dm^3 près.

Partie B - Étude de l'évolution des ventes

1. **a.** On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{400}{16\mathrm{e}^{-x} + 4} = 100$ et enfin $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 80$.

b. Le résultat précédent signifie géométriquement que la droite d'équation $y = 80$ est asymptote horizontale à la courbe C_g au voisinage de plus l'infini.

c. Ceci signifie que les ventes vont plafonner à 80 unités.

2. **a.** On a $g'(x) = -\left(-\dfrac{400 \times 16}{(16\mathrm{e}^{-x} + 4)^2}\right) = \dfrac{6400\mathrm{e}^{-x}}{(16\mathrm{e}^{-x} + 4)^2}$.

b. Tous les termes de ce quotient sont supérieurs à zéro, donc $g'(x) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$ et la fonction g est donc strictement croissante de $g(0) = \dfrac{400}{16 + 4} - 20 = 0$ à 80.

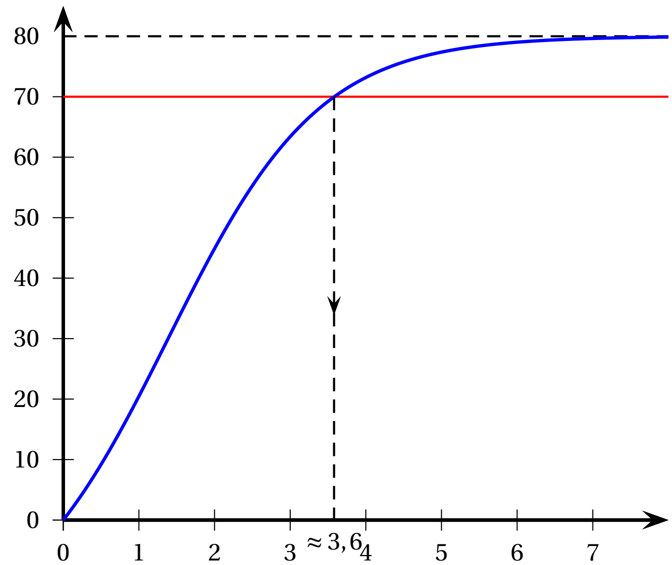
3. *Méthode* 1

On a $g(3) = \dfrac{400}{16\mathrm{e}^{-3}+4} - 20 \approx 63,39$ et

$g(4) = \dfrac{400}{16\mathrm{e}^{-4}+4} - 20 \approx 93,17$.

La fonction g étant strictement croissante l'entreprise vendra 70 conteneurs au cours du quatrième mois de production.

Méthode 2



Graphiquement on voit que la droite d'équation $y = 70$ coupe la courbe en un point dont l'abscisse est à peu près 3,6 soit $3 + 0,6 \times 30$ soit 3 mois et 18 jours à peu près. Cette méthode est plus précise.