Corrigé du baccalauréat STI Métropole juin 2006
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

1. $(z-4)\left(z^2+4z+16\right)=0 \iff \begin{cases} z-4=0 \\ z^2+4z+16=0 \end{cases}$

   La première équation a pour solution $z_1=4$. La seconde est une équation du second degré :

   $\Delta=16-4\times16=-3\times16=\left(4\text{i}\sqrt{3}\right)^2<0$.

   L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

   $z_2=\dfrac{-4-4\text{i}\sqrt{3}}{2}=-2-2\text{i}\sqrt{3}$ et $z_3=-2+2\text{i}\sqrt{3}$.

   On a donc $S=\{4\,;\,-2-2\text{i}\sqrt{3}\,;\,-2+2\text{i}\sqrt{3}\}$.

2. **a.** On a $|z_1|=4$ et $\arg z_1=0$;

   $|z_2|^2=4+12=16=4^2\Rightarrow|z_2|=4$.

   Donc $z_2=4\left(-\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)=4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\text{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

   Donc un argument de z_2 est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

   De même $z_3=4\left(-\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\text{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

   Donc un argument de z_3 est $\dfrac{2\pi}{3}$.

   b. $z_4=8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}=8\left[\cos\frac{\pi}{3}+\text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right]=8\left(\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4+4\text{i}\sqrt{3}$.

   $z_5=2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\text{i}\sqrt{3}$.

3. **a.** Voir la figure.

   b. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{AD}}$ est égale à $z_\text{B}-z_\text{A}=4\text{i}\sqrt{3}$: celle du vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$ est égale à $z_\text{C}-z_\text{B}=4\text{i}\sqrt{3}$. On a donc $\overrightarrow{\text{AD}}=\overrightarrow{\text{BC}}\iff$ ADCB est un parallélogramme.

   De plus $\text{AB}^2=36+12=48$ et $\text{BC}^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2=48$, donc AB = BC.

   Le parallélogramme ADCB a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un losange.

EXERCICE 2 **5 points**

1. g est dérivable et $g'(x)=-\dfrac{2\pi}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)+\dfrac{4\pi}{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$, puis

   $g''(x)=-\dfrac{2\pi^2}{9}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)-\dfrac{4\pi^2}{9}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$.

   Calculons :

   $\pi^2g(x)+9g''(x)=\pi^2\left[2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)+4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)\right]+9\left[-\dfrac{2\pi^2}{9}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)-\dfrac{4\pi^2}{9}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)\right]=$

   $2\pi^2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)+4\pi^2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x\right))-2\pi^2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)-4\pi^2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)=0$.

   Conclusion g est une solution de l'équation différentielle (E).

2. **a.** (E) peut s'écrire $\frac{\pi^2}{9}y + y'' = 0$ qui est de la forme $\omega^2 y + y'' = 0$ avec $\omega = \frac{\pi}{3}$.
On sait que les solutions sont de la forme :
$f(x) = A\cos\frac{\pi}{3}x + B\sin\frac{\pi}{3}x$.

b. On a $f'(x) = -A\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}x + B\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}x$. Donc $f'(0) = B\frac{\pi}{3}$.
$\left\{\begin{array}{rcl} f(0) & = & 1\\ f'(0) & = & \frac{\pi}{3}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 1\\ B\frac{\pi}{3} & = & \frac{\pi}{3}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 1\\ B & = & 1\end{array}\right.$
La solution particulière vérifiant les deux conditions initiales est donc :

$$f(x) = \cos\frac{\pi}{3}x + \sin\frac{\pi}{3}x.$$

c. On peut écrire en factorisant $\sqrt{2}$:
$f(x) = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{3}x\right)\right] =$
$\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}x + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}x\right)\right] =$
$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$. (d'après la formule $\cos a\cos b + \sin a\sin b = \cos(a-b)$)

d. $f(x) = 1 \iff \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff \cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff$
$\cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
On a donc deux possibilités :
$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4} & = & \frac{\pi}{4} \text{ ou}\\ \frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4} & = & -\frac{\pi}{4}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \frac{\pi}{3}x & = & \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou}\\ \frac{\pi}{3}x & = & 0 + 2k'\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{3}{2} + 6k \quad \text{ou}\\ x & = & 0 + 6k'\end{array}\right.$
Seuls 0 et $\frac{3}{2}$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,3]$, donc

$$S = \left\{0,\ \frac{3}{2}\right\}$$

PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. Le discriminant est égal à $\Delta = 25 - 4\times 2\times 2 = 9 = 3^2 > 0$.
L'équation a donc deux solutions réelles :

$$S = \left\{\frac{5+3}{4} = 2,\quad \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}\right\}.$$

2. $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$.
$\left\{\begin{array}{l} 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0\\ X = \ln x\end{array}\right. \Rightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0$ équation résolue à la question 1.
On a donc :

$X_1 = \ln x_1 = 2 \iff x_1 = \mathrm{e}^2$ ou
$X_2 = \ln x_2 = \dfrac{1}{2} \iff x_2 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

$$S' = \left\{\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Remarque : $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Partie B

1. Limites aux bornes

a. $\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0} 2(\ln x)^2 = +\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 0} -5\ln x = +\infty\end{array}\right. \Rightarrow$ par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Graphiquement ce résultat montre que l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.

b. D'après l'indication on peut écrire :
$f(x) = \ln x\left[2\ln x - 5 + \dfrac{2}{\ln x}\right]$.

$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to +\infty} 2\ln x = +\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\ln x} = +\infty\end{array}\right. \Rightarrow$ par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

Et $\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} 2\ln x - 5 + \frac{2}{\ln x} = +\infty\end{array}\right. \Rightarrow$ par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Variations

a. En dérivant terme à terme :
$f'(x) = 2\times 2\times \ln x \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{x} = \dfrac{4\ln x - 5}{x}$.

b. Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $4\ln x - 5$.

$4\ln x - 5 > 0 \iff \ln x > \dfrac{5}{4} \iff x > \mathrm{e}^{\frac{5}{4}}$.

Donc la fonction f est croissante sur $\left]\frac{5}{4}\ ;\ +\infty\right[$.

De même $4\ln x - 5 < 0 \iff \ln x < \dfrac{5}{4} \iff x < \mathrm{e}^{\frac{5}{4}}$.

Donc la fonction f est décroissante sur $\left]0\ ;\ \frac{5}{4}\right[$.

c. Sur $\left]0\ ;\ \frac{5}{4}\right[$ la fonction f décroit de plus l'infini à $f\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right) = -1,125$ puis croit de $-1,125$ à plus l'infini. On a vu à la question 2. que f s'annule en $x = \sqrt{e}$ et en $x = \mathrm{e}^2$.

On a donc le tableau de signes suivant :

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		e^2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $M(x\ ;\ y) \in \mathrm{T} \iff y - f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \left(x - \sqrt{\mathrm{e}}\right) f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$.

Or $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 0$ et $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{4\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) - 5}{\sqrt{\mathrm{e}}} = \dfrac{-3}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Donc $M(x\ ;\ y) \in \mathrm{T} \iff y = \dfrac{-3}{\sqrt{\mathrm{e}}}\left(x - \sqrt{\mathrm{e}}\right) \iff y = \dfrac{-3x}{\sqrt{\mathrm{e}}} + 3$.

4. Voir à la fin.

5. Calcul d'une aire

a. Voir à la fin.

b. On a $F'(x) = \left[2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11\right] + x\left(\dfrac{4\ln x}{x} - \dfrac{9}{x}\right) = \left[2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11\right] + 4\ln x - 9 = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = f(x)$.

Donc F est une primitive de f.

c. On a vu que sur $\left[\sqrt{\mathrm{e}}\ ;\ \mathrm{e}^2\right]$, $f(x) \leqslant 0$, donc $\mathscr{A}$ est l'opposée de l'intégrale $\displaystyle\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\mathscr{A} = -\displaystyle\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x = -\left[F(x)\right]_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^2} = -F\left(\mathrm{e}^2\right) + F\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) =$

$\sqrt{\mathrm{e}}\left[2\left(\ln\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2 - 9\ln\sqrt{\mathrm{e}} + 11\right] - \mathrm{e}^2\left[2\left(\ln \mathrm{e}^2\right)^2 - 9\ln \mathrm{e}^2 + 11\right] = 7\sqrt{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^2$ (u. a.)

Une unité d'aire est égale à $1 \times 1 = 1$ cm^2, on a

$\mathscr{A} = 7\sqrt{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^2 \approx 4,15$ cm^2.