∽ Baccalauréat STI Métropole 18 juin 2008 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

1. $\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12 = \left(2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$. L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

2. **a.** $|z_A|^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow |z_A| = 2$.

On peut écrire $z_A = 2\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos -\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin -\frac{\pi}{3}\right)$. Un argument de z_A est donc $-\frac{\pi}{3}$.

$z_B = 2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$. Le module de z_B est donc égale à 2 et un argument est 0.

$z_C = \overline{z_A}$, donc son module est égale à 2 et un de ses arguments est égal à $\frac{\pi}{3}$.

b.

c. On a vu que $|z_A| = |z_C| = 2 = \text{OA} = \text{OC}$ et que $|z_B| = \text{OB} = 2$, ce qui montre que les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

3. **a.** z_D a un module égal à 2, donc D appartient lui aussi au cercle précédent. Un de ses arguments est égal à $\frac{2\pi}{3}$. D'où la construction ci-dessous.

b. $z_D = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Donc $z_D - z_A = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} - \left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} - 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

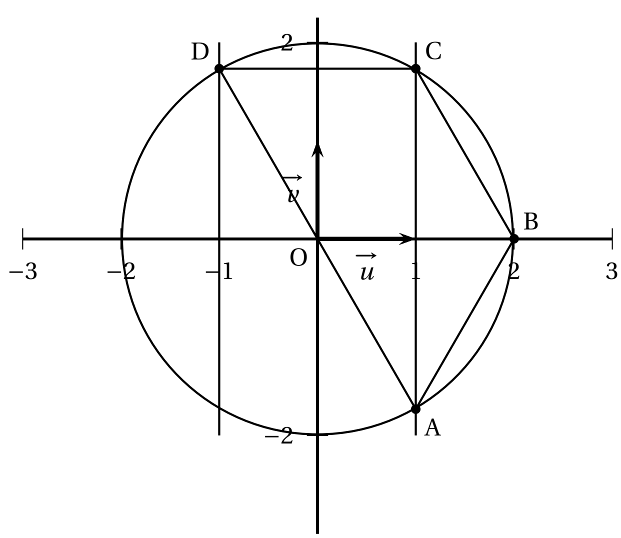
De même $z_C - z_B = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} - 2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

On a donc $z_D - z_A = 2\left(z_C - z_B\right) \iff \overrightarrow{\text{AD}} = 2\overrightarrow{\text{BC}}$. Ces deux vecteurs sont colinéaires, donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles et le quadrilatère ABCD est un trapèze.

c. $\text{AB} = |z_B - z_A| = \left|2 - \left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\right| = \left|1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2$.

De même $\text{CD} = |z_D - z_C| = \left|-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} - \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\right| = |2| = 2$.

On a donc AB = CD : le trapèze ABCD est isocèle.



EXERCICE 2 **5 points**

1. Puisqu'il y a équiprobabilité, la probabilité d'écouter la chanson n° 7 est égale à $\frac{1}{11}$.

2. a. Il y a trois chansons de 200 secondes ; $p(\text{A} = \frac{3}{11}$.

   b. Il y a 4 chansons de plus de 210 secondes ; $p(\text{B} = \frac{4}{11}$.

   c. $\overline{\text{B}}$ signifie : « la chanson a une durée inférieur ou égale à 210 secondes ».
   Il y a 6 chansons d'au plus 210 secondes, donc $p\left(\overline{\text{B}}\right) = \frac{6}{11}$.

3. a. X peut valoir 150, 185, 200, 215, 230, 300.

   b.

x_i	150	185	200	215	230	300
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$

   c. On a $\text{E}(X) = 150 \times \frac{1}{11} + 185 \times \frac{2}{11} + 200 \times \frac{3}{11} + 215 \times \frac{2}{11} + 230 \times \frac{2}{11} + 300 \times \frac{1}{11} = \frac{2\,310}{11} = 210$.
   Cela signifie que sur un grand nombre d'écoutes n , le temps total d'écoute sera environ de $210n$ secondes.

PROBLÈME **10 points**

Partie A - Exploitation d'un graphique

1. a. On lit $g(0) = 0$.

   b. $g'(0)$ nombre dérivé en 0 est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0. Cette tangente contient le point (1 ; 2). Ce coefficient directeur est bien égal à 2.

   c. g semble être positive sur $\mathbb{R}_+$.

2. a. $\text{O}(0\,;\,) \in \mathcal{C}_g \iff 0 = b + \text{e}^0 \iff 0 = b + 1 \iff b = -1$.

   b. Comme $g(x) = ax - 1 + \text{e}^x$, $g'(x) = a + \text{e}^x$.

   c. On a vu que $g'(0) = 2 \iff a + 1 = 2 \iff a = 1$.
   Conclusion $g(x)x - 1 + \text{e}^x$.

Partie B - Étude d'une fonction

1. $f(x) = x \times 1 - 4x \times \frac{1}{x} - x \times \text{e}^{-x} = x\left(1 - \frac{4}{x} - 4\text{e}^{-x}\right)$.
   On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{x} = 0$,
   $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites,
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$,
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{e}^{-x} = 0$, donc par produit de limites,
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b. Soit la fonction d définie par $d(x) = f(x) - (x - 4) = x - 4 - x\text{e}^{-x} - x + 4 = -x\text{e}^{-x}$.
   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x\text{e}^{-x} = 0$, on peut dire que la droite Δ d'équation $y = x - 4$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_1$ au voisinage de plus l'infini.

c. On a vu que $d(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$ qui est du signe de $-x$, car quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-x} >$.
Donc $x < 0 \Rightarrow d(x) > 0$: la courbe est au dessus de la droite ;
$x > 0 \Rightarrow d(x) < 0$: la courbe est au dessous de la droite.

3. **a.** $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x} - 1 + x\right) = g(x)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Comme $g(x) \geqslant 0$, et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, on peut en déduire que $f'(x) \geqslant 0$.

c.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	-4	$+\infty$

4. Voir en bas.

Partie C - Calcul d'une aire

1. **a.** On a $H'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1 - x - 1) = -x\mathrm{e}^{-x} = h(x)$.

b. On en déduit qu'une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x) = \dfrac{x^2}{2} - 4x + H(x) = \dfrac{x^2}{4} - 4x + (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

2. **a.** Voir plus bas.

b. On a $f(2) = 2-4-2\mathrm{e}^{-2} < 0$ et comme $h(0) = -4 < 0$, la fonction f est négative sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
Donc en unité d'aire :
$\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^2 -f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 -f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{x^2}{2} + 4x - (x+1)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 = -\dfrac{4}{2} + 8 - 3\mathrm{e}^{-2} + 1 = 7 - 3\mathrm{e}^{-2}$
L'unité d'aire valant 1 cm^2, on a :

$$\mathscr{A} = 7 - 3\mathrm{e}^{-2} \approx 6,593 \approx 6,59\ \text{cm}^2.$$

ANNEXE