Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat STI Métropole juin 2010 ∽
Génie mécanique, génie des matériaux

EXERCICE 1 **4 points**

1. $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$
   $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\times 2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$
   $f''(x) = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$.
   On a $4f''(x) = 4\times\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$ et
   $-f(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$.
   On a bien $4f''(x) = -f(x)$, donc f est une solution de l'équation différentielle.
2. **a.** On sait que la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E) est :
   $f(x) = A\sin\frac{x}{2} + B\cos\frac{x}{2}$, avec $A\in\mathbb{R}, B\in\mathbb{R}$.

   b. La fonction g est de la forme : $g(x) = A\sin\frac{x}{2}+B\cos\frac{x}{2}$.
   Cette fonction vérifie les conditions :
   $\left\{\begin{array}{lcl} g(0) & = & 1\\ g(\pi) & = & -\sqrt{3}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} B & = & 1\\ A & = & -\sqrt{3}\end{array}\right.$
   On a donc $g(x) = -\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$.

   c. En factorisant 2, on peut écrire :
   $g(x) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right) = 2\left(-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$ (en application de l'identité : $\cos a\cos b - \sin a\sin b = \cos(a+b)$).

EXERCICE 2 **6 points**

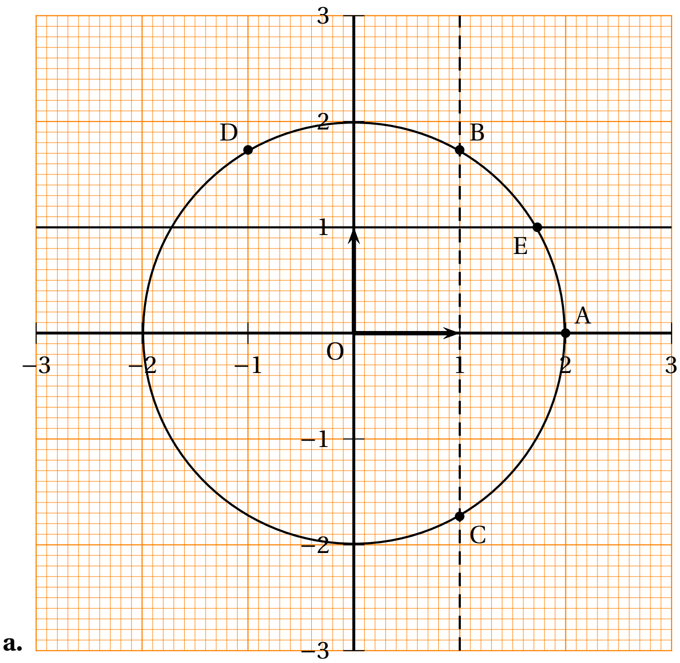
1. $(z-2)\left(z^2-2z+4\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-2 & = & 0\\ z^2-2z+4 & = & 0\end{array}\right.$
   Pour l'équation du second degré : $\Delta = 4-16 = -12 = \left(2\text{i}\sqrt{3}\right)^2$.L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :
   $$\frac{2+2\text{i}\sqrt{3}}{2} = 1+\text{i}\sqrt{3} \text{ et } 1-\text{i}\sqrt{3}.$$
   Finalement : $S = \left\{1-\text{i}\sqrt{3}\ ;\ 2\ ;\ 1+\text{i}\sqrt{3}\right\}$.
2. **a.** z_{A} est un réel de module 2 et dont un argument est 0.
   $z_{\text{B}} = 1+\text{i}\sqrt{3} \Rightarrow |z_{\text{B}}|^2 = 1+3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_{\text{B}}| = 2$.
   Donc $z_{\text{B}} = 2\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\imath\sin\frac{\pi}{3}\right)$.
   Un argument de z_{B} est donc $\dfrac{\pi}{3}$.

b. z_C étant le conjugué de z_B son module est aussi égal à 2 et un de ses arguments est $-\dfrac{\pi}{3}$.

c. Cette écriture montre que le module de z_D est égal à 2 et que l'un de ses arguments est $\dfrac{2\pi}{3}$.

d. $z_D = 2e^{2i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$.

$z_E = 2ie^{-i\frac{\pi}{3}} = 2i\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right) = 2i\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} + i$.



3. a.

Dans les questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

b. On a $z_E = -\sqrt{3} + i \Rightarrow |z_E|^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_E| = 2$.
Donc les affixes des points A, B, C, D et E ont un module égal à 2 : ces cinq points appartiennent donc au cercle de centre O et de rayon 2.

c. Voir la figure

d. B et C ont la même partie réelle, donc la droite (BC) est parallèle à l'axe des ordonnées ;
B et D ont la même partie imaginaire, donc la droite (BD) est parallèle à l'axe des abscisses.
Conclusion : les droites (BC) et (BD) sont perpendiculaires : le triangle DBC est rectangle en B.

PROBLÈME **10 points**

1. a. On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b. $f(x) = 6 - x - e^{-x} = 6e^{-x}e^{x} - xe^{-x}e^{x} - e^{-x} = e^{-x}\left(6e^{x} - xe^{x} - 1\right)$.
Avec $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, on obtient par somme (la parenthèse a pour limite -1), puis produit de limites :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

2. **a.** Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$d(x) = f(x) - (-x+6) = 6 - x - \mathrm{e}^{-x} + x - 6 = -\mathrm{e}^{-x}$
Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} d(x) = 0$, la droite Δ d'équation $y = 6 - x$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

b. $d(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$, car $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout réel x. Ceci signifie que $f(x) < -x+6$, c'est-à-dire que la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de son asymptote Δ.

3. **a.** f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f'(x) = -1 + \mathrm{e}^{-x} = -1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$.

b. $1 - \mathrm{e}^x \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \mathrm{e}^x \iff \ln 1 \geqslant x$ (par croissance de la fonction ln) $\iff 0 \geqslant x \iff x \leqslant 0$.

c. D'après les deux questions précédentes comme $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \mathrm{e}^x$, donc si $x \leqslant 0$, $f'(x) > 0$;
On obtiendrait de même que si $x > 0$, $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc croissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et décroissante sur $]0\,;+\infty[$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			
$f(x)$			5		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

4. Δ' a même coefficient directeur que Δ : son équation est donc $y = -x$. Les points communs à Δ' et à $\mathscr{C}_f$ ont une abscisse qui vérifie :
$f(x) = -x \iff 6 - x - \mathrm{e}^{-x} = -x \iff 6 = \mathrm{e}^{-x} \iff \ln 6 = -x \iff x = -\ln 6$.
Le point commun à Δ' et à $\mathscr{C}_f$ est $\mathrm{N}(-\ln 6\ ;\ \ln 6)$.

5. Une équation de $\mathscr{T}$ est :
$M(x\,;\ y) \in \mathscr{T} \iff y - f(-\ln 6) = f'(-\ln 6)(x - (-\ln 6))$.
On vient de voir que $f(-\ln 6) = \ln 6$;
$f'(-\ln 6) = -1 + \mathrm{e}^{\ln 6} = -1 + 6 = 5$.
Donc $M(x\ ;\ y) \in \mathscr{T} \iff y - \ln 6 = 5(x - (-\ln 6)) \iff y = 5x + 6\ln 6$.

6. Voir la figure plus bas.

7. **a.** F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = 6 - x - \mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

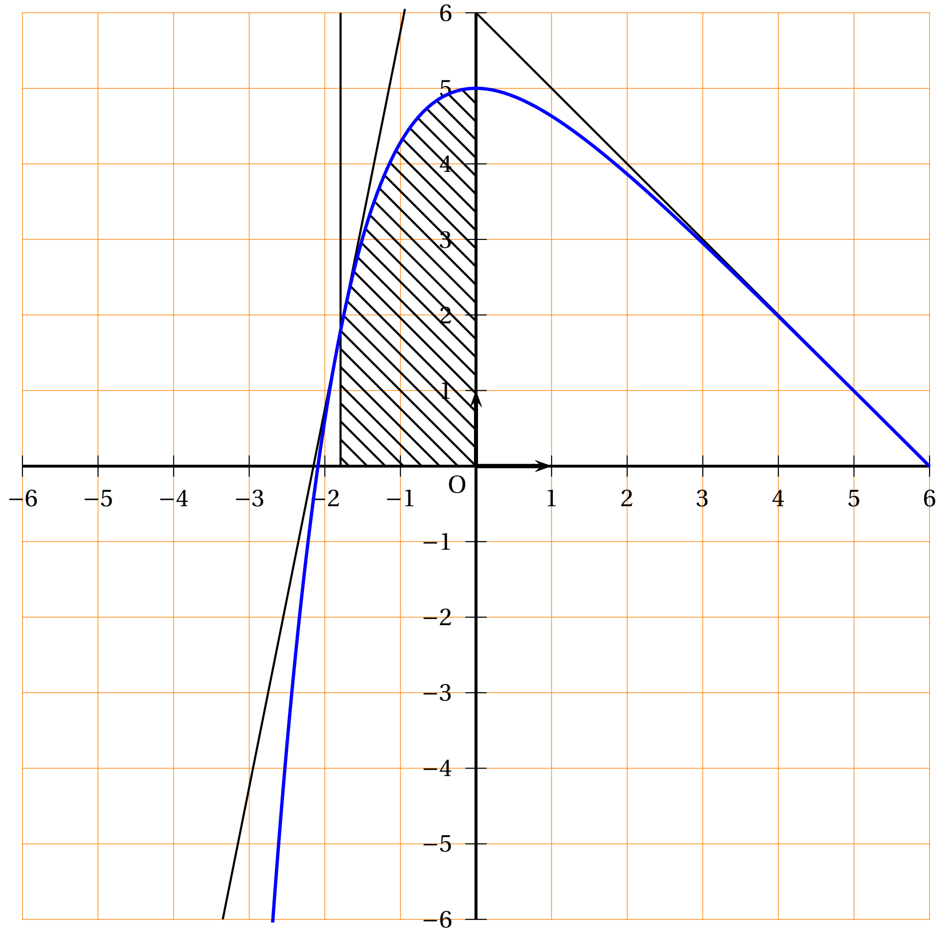
b. Voir la figure

c. D'après le tableau de variations comme $f(-\ln 6) = \ln 6 > 0$ et que la fonction est croissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$, il en résulte que sur l'intervalle $[-\ln 6\ ;\ 0[$ la fonction f est positive. Par conséquent l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = -\ln(6)$ et l'axe des ordonnées est égale (en unité d'aire) à l'intégrale :

$$\int_{-\ln 6}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{-\ln 6}^{0} = F(0) - F(-\ln 6) = 1 - \left(-6\ln 6 - \frac{(-\ln 6)^2}{2} + \mathrm{e}^{\ln 6}\right) =$$

$$1 + 6\ln 6 + \frac{(-\ln 6)^2}{2} - 6 = 6\ln 6 + \frac{(\ln 6)^2}{2} - 5.$$

$\mathscr{A} \approx 7{,}4\ \text{cm}^2$.



6
5
4
3
2
1
O
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
−1
−2
−3
−4
−5
−6