Corrigé du baccalauréat STI Métropole septembre 2006
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

1. $\Delta = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 4 = 12 - 16 = -4 = (2\text{i})^2$. L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2\sqrt{3}+2\text{i}}{2} = -\sqrt{3}+\text{i} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{3}-\text{i}.$$

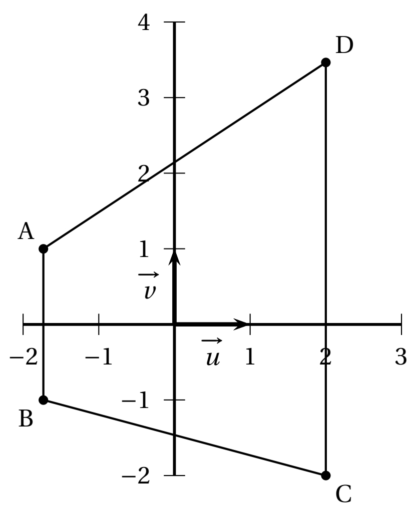
2. **a.** $|z_1| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$. On peut alors écrire $z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\frac{1}{2}\right) =$
$2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\text{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$. Un argument de z_1 est donc $\frac{5\pi}{6}$.
Il suit pour z_2 conjugué de z_1, $|z_2| = 2$ et $\arg(z_2) = -\frac{5\pi}{6}$.

   b. Le module du carré est égal au carré du module, donc $\left|z_1^2\right| = 4$ et $\arg\left(z_1^2\right) = 2\arg(z_1) = 2 \times \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$.
De même on obtient $\left|z_2^2\right| = 4$ et $\arg\left(z_2^2\right) = -\frac{5\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3}$.

   c. On a vu que $z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}+\text{i}$ et $z_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\text{i}\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}-\text{i}$.

3. **a.** Voir à la fin de l'exercice.

   b. A et B ont la même abscisse : la droite (AB) est donc parallèle à l'axe des ordonnées ;
C et D ont la même abscisse : la droite (CD) est donc parallèle à l'axe des ordonnées ;
Donc (AB) et (CD) sont parallèles ; le quadrilatère (ABCD) est donc un trapèze.



EXERCICE 2 **5 points**

1.

	Avec le défaut de diamètre	Sans le défaut de diamètre	Total
Avec le défaut d'épaisseur	5 %	3 %	8 %
Sans le défaut d'épaisseur	1 %	91 %	92 %
Total	6 %	94 %	100 %

2. Dans le tableau première ligne, deuxième colonne de nombres, on constate qu'il y a 8 - 5 = 3 pièces sur 100 qui présentent un défaut d'épaisseur et pas de défaut de diamètre. Donc $p_1 = \dfrac{3}{100} = 0,03$.

3. Sur 6 pièces présentant un défaut de diamètre, 5 présentent le défaut d'épaisseur. La probabilité $p_2 = \dfrac{5}{6}$.

4. **a.** Il peut y avoir 0, 1 ou 2 défauts.

b.

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	0,91	0,04	0,05

c. $\mathrm{E}(X) = 0 \times 0,91 + 1 \times 0,04 + 2 \times 0,05 = 0,14$.

PROBLÈME 10 points

Partie I : étude de la fonction f

1. Quel que soit le réel x, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, donc $f(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2} = f(x)$: la fonction est paire.
Donc $\mathscr{C}$ a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.

2. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$.
Donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3. f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

4. $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} > 0 \iff \mathrm{e}^{x} > \mathrm{e}^{-x} \Rightarrow$ par croissance de la fonction ln $x > -x \iff 2x > 0 \iff x > 0$. Donc si $x > 0$, $f'(x) > 0$.
On trouve de même que si $x < 0$, $f'(x) < 0$.

5. On en déduit que pour $x > 0$, f est croissante, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

6. Voir la figure à la fin de l'exercice.

Partie II : étude de la longueur d'un arc de la courbe

1. On a $f(0) = \dfrac{1+1}{2} = 1$. E(0 ; 1).

2. $A\left(1\,;\,\frac{e+e^{-1}}{2}\right)$ et $B\left(-1\,;\,\frac{e+e^{-1}}{2}\right)$.

Donc $AE^2 = 1^2 + \left[1-\frac{e+e^{-1}}{2}\right]^2 = 1+\left[1-\frac{e+e^{-1}}{2}\right]^2$.

$AE = \sqrt{1+\left[1-\frac{e+e^{-1}}{2}\right]^2}$.

Par symétrie : AE = BE.

Donc $AE + BE = 2\left(\sqrt{1+\left[1-\frac{e+e^{-1}}{2}\right]^2}\right)$ et comme l'unité de longueur est égale à 5 cm :

$AE + EB \approx 11,379 \approx 11,38$ cm

3. a. $1+[f'(x)]^2 = 1+\left[\dfrac{e^x+e^{-1}}{2}\right]^2 = 1+\dfrac{e^x}{4}+\dfrac{e^{-x}}{4}-\dfrac{1}{2} = \dfrac{e^x}{4}+\dfrac{e^{-x}}{4}+\dfrac{2}{4} = \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$.

b. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx = \left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^1-e^{-1}}{2} - \left(\frac{e^{-1}-e^1}{2}\right) = e-e^{-1}$.

c. Donc $\ell = 5\left(e-e^{-1}\right)$.

On a $\ell \approx 11,75$.

L'erreur commise en prenant comme longueur AE + EB est donc à peu près : $11,75-11,38 = 0,37$ (cm).