

Durée : 4 heures

∞ Corrigé du baccalauréat STI Métropole 21 juin 2012 ∞
Génie mécanique, génie des matériaux

EXERCICE 1

5 points

1. A est dans le deuxième cadran et B dans le troisième : réponse b.

2. On a $\frac{z_A}{z_B} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i(\frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi}{6})} = e^{i(\frac{9\pi}{6})} = e^{i(\frac{3\pi}{2})} = e^{-i(\frac{\pi}{2})}$. Réponse c.

3. On a $z_A = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, donc $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

De même $z_B = \cos \frac{-2\pi}{3} + i \sin \frac{-2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On a donc $AB^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3+1-2\sqrt{3}}{4} + \frac{+3+1-2\sqrt{3}}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$.

Donc $AB = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Réponse d.

4. $z_C = z_B^2 = e^{-i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Réponse b.

5. On a $\delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$: l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; ce sont les affixes de z_B et \bar{z}_B . Réponse c.

EXERCICE 2

4 points

1. L'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ a pour solution i et $-i$.

On sait que la solution générale de cette équation est $f(x) = A \cos x + B \sin x$.

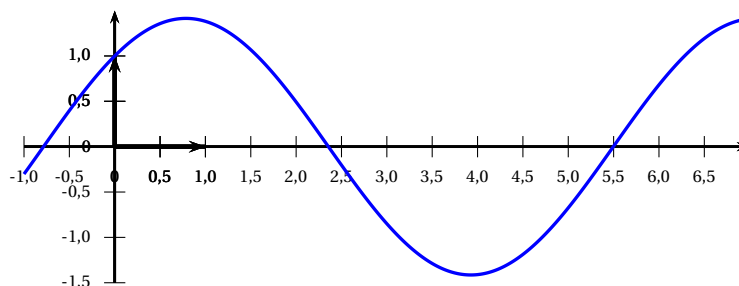
2. on doit avoir $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = \end{cases} \iff \begin{cases} A+0 = 1 \\ -0+B = 1 \end{cases}$.

Donc $f(x) = \cos x + \sin x$.

3.

$$f(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

et une représentation graphique de cette fonction est donnée ci-dessous.



a. Cette équation n'a pas de solution.

b. La courbe coupe la droite d'équation $y = 1$ en deux points d'abscisse 0 et à peu près $\frac{\pi}{2}$.

c. L'équation a deux solutions.

4. $f(x) = 0$ ou $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ soit $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

On a donc $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ou $x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ d'où finalement :

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4}$$

PROBLÈME

11 points

Partie A - Calcul de volume

1. $f(0) = 1, f(1) = 2, f'(0) = 0, f'(1) = 0$.

2. On cherche à déterminer ces deux nombres.

a. D'après la question précédente, a et b doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 2 \\ f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 1 = 1 \\ a + b = 2 \\ 0 = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$$

b. De la première équation on déduit que $b = 2 - a$ et en remplaçant dans la seconde :

$$3a + 2(2 - a) = 0 \text{ d'où } a + 4 = 0, a = -4 \text{ et donc } b = 2 - (-4) = 6.$$

O a donc $f(x) = -4x^3 + 6x^2 + 1$ sur $[0; 1]$.

$$[f(x)]^2 = 4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1$$

Une primitive de la fonction d'expression $[f(x)]^2$ est $4\frac{x^7}{7} - 12\frac{x^6}{6} + 9\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} + x$.

3.

$$\pi \int_0^1 [f(x)]^2 dx.$$

a. D'après le résultat précédent :

$$\begin{aligned} \pi \int_0^1 [f(x)]^2 dx &= \pi \left[4\frac{x^7}{7} - 12\frac{x^6}{6} + 9\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \\ &= 4\frac{1^7}{7} - 12\frac{1^6}{6} + 9\frac{1^5}{5} - 4\frac{1^4}{4} + 6\frac{1^3}{3} + 1 = \frac{4}{7} - 2 + \frac{9}{5} - 1 + 2 + 1 = \frac{4}{7} + \frac{9}{5} = \\ &= \frac{20 + 63}{7 \times 5} = \frac{83}{35} \approx 2,3714, \text{ soit } 2,371 \text{ m}^3 \text{ au dm}^3 \text{ près.} \end{aligned}$$

b. Le rayon du cylindre est égal à 2, donc son volume est : $\pi \times 2^2(4 - 1) = 12\pi$.

Le volume du conteneur est donc $12\pi + \frac{83}{35} \approx 40,0705$ soit $40,071 \text{ m}^3$ au dm^3 près.

Partie B - Étude de l'évolution des ventes

1. a. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{400}{16e^{-x} + 4} = 100$ et enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 80$.

b. Le résultat précédent signifie géométriquement que la droite d'équation $y = 80$ est asymptote horizontale à la courbe C_g au voisinage de plus l'infini.

c. Ceci signifie que les ventes vont plafonner à 80 unités.

2. a. On a $g'(x) = -\left(\frac{400 \times 16}{(16e^{-x} + 4)^2}\right) = \frac{6400e^{-x}}{(16e^{-x} + 4)^2}$.

b. Tous les termes de ce quotient sont supérieurs à zéro, donc $g'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$ et la fonction g est donc strictement croissante de $g(0) = \frac{400}{16 + 4} - 20 = 0$ à 80.

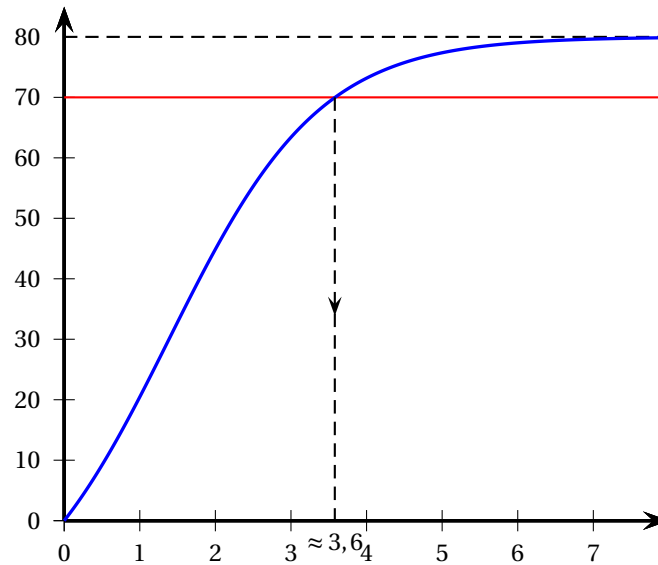
3. *Méthode 1*

$$\text{On a } g(3) = \frac{400}{16e^{-3} + 4} - 20 \approx 63,39 \text{ et}$$

$$g(4) = \frac{400}{16e^{-4} + 4} - 20 \approx 93,17.$$

La fonction g étant strictement croissante l'entreprise vendra 70 conteneurs au cours du quatrième mois de production.

Méthode 2



Graphiquement on voit que la droite d'équation $y = 70$ coupe la courbe en un point dont l'abscisse est à peu près 3,6 soit $3 + 0,6 \times 30$ soit 3 mois et 18 jours à peu près. Cette méthode est plus précise.