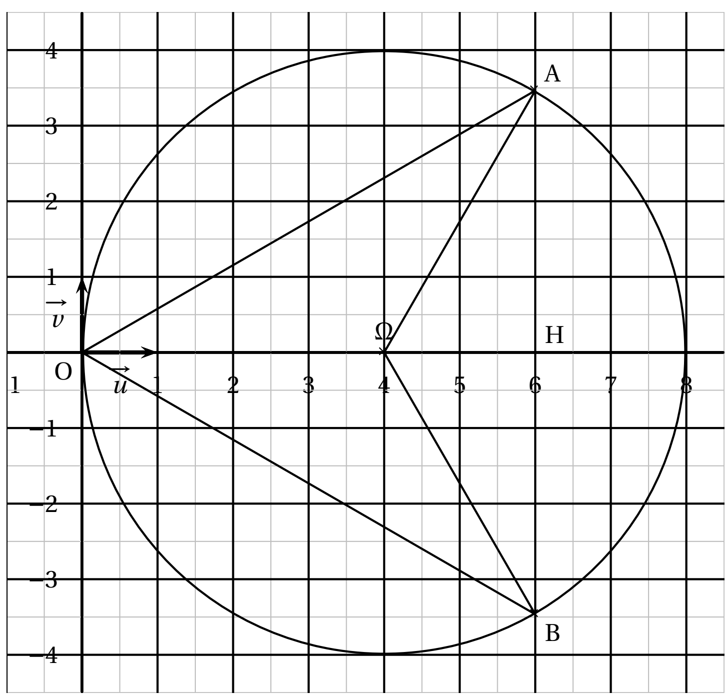
Corrigé du baccalauréat STI Métropole
Génie mécanique, génie des matériaux septembre 2009

EXERCICE 1

1. **a.** On sait que la solution générale de l'équation $y' = -y$ est de la forme $y = K\mathrm{e}^{-x}$, $K \in \mathbb{R}$
   b. f solution de (E) et $f(0) = 1 \Rightarrow K\mathrm{e}^{-0} = 1 \iff K = 1$.
   Donc $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
2. **a.** La valeur moyenne de f sur $[2\,;\,3]$ est donnée par $V_m = \dfrac{1}{3-2}\displaystyle\int_2^3 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_2^3 = \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-3}$.
   b. Le même calcul sur l'intervalle $[n\,;\,n+1]$ donne :
   $V_n = \dfrac{1}{n+1-n}\displaystyle\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_n^{3n+1} = \mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-n-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \mathrm{e}^{-n}\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)$.
3. Pour tout n entier positif ou nul, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-n-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-n} \times \mathrm{e}^{-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = u_{n+1} = \mathrm{e}^{-1}u_n$.
   La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison e^{-1} de premier terme $u_0 = 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

EXERCICE 2

1. $z^3 - 12z^2 + 48z = 0 \iff z\left(z^2 - 12z + 48\right) = 0$.
   La solution 0 est évidente. Reste à résoudre l'équation du second degré : $z^2 - 12z + 48 = 0$.
   $\Delta = 12^2 - 4 \times 48 = 144 - 192 = -48 = -3 \times 16 = \left(4\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^2$.
   L'équation a deux solutions complexes :
   $z_1 = \dfrac{12 + 4\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} = 6 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$ et $z_2 = 6 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}$.
   L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{0\,;\,6 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}\,;\,6 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}\right\}$.



2. **a.**
(On utilisera une feuille de papier millimétré fournie avec le sujet)

b. On a $|z_A|^2 = 6^2 + 4 \times 3 = 36 + 12 = 48$.
Donc $|z_A| = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$.
On peur donc écrire $z_A = 4\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = 4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$.
Un argument de z_A est donc $\dfrac{\pi}{6}$.

c. Comme $z_B = \overline{z_A}$, le module de z_B est égal à celui de z_A, soit $OB = OA = 4\sqrt{3}$ et un argument de $z_B$est égal à $-\dfrac{\pi}{6}$.
On a donc $\widehat{BOA} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.
Le triangle OAB est donc isocèle avec un angle au sommet de 60 ° : les deux autres angles, égaux mesurent eux aussi 60 °; le triangle OAB est équilatéral.

d. On a $O\Omega = |z_\Omega| = 4$;
$\Omega A = \left|6 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} - 4\right| = \left|2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{4 + 12} = 4$;
$\Omega B = \left|6 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} - 4\right| = \left|2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{4 + 12} = 4$;
On a donc $\Omega A = \Omega B = \Omega O$, Ω équidistant des points O, A et B est le centre du cercle circonscrit au triangle OAB.
Autre méthode : en considérant le point H d'affixe 6, on voit que [OH] est médiane du triangle équilatéral OAB. Le point Ω situé aux 2/3 sur cette médiane est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle OAB.

PROBLÈME

Partie A

1. g est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$; elle est donc dérivable sur cet intervalle et :
$g'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = 2\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = 2\left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)$

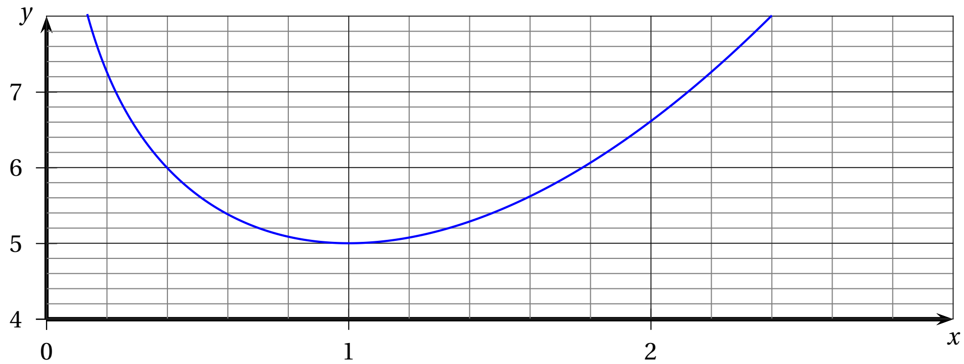
2. Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $x^2 - 1$ qui est positif sauf entre -1 et 1, soit ici $g'(x) < 0$ si $0 < x1$ et $g'(x) > 0$ si $x > 1$. D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

- Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$;
- $g(1) = 1^2 - 2\ln(1) + 4 = 1 + 4 = 5$;
- On peut écrire $g(x) = x\left(x - 2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{4}{x}\right)$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{4}{x} = +\infty$ et finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, par produit des limites.

3. La fonction a un minimum en 1 qui vaut 5 : on peut donc affirmer que pour tout réel supérieur à zéro, $g(x) > 5 > 0$.



Partie B

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{\ln(x) - 1}{x}.$$

1. **a.** On a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
   On peut écrire $\frac{\ln(x) - 1}{x} = \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$.
   Or $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = -\infty$, d'où par somme des limites $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.
   L'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ au voisinage de 0.

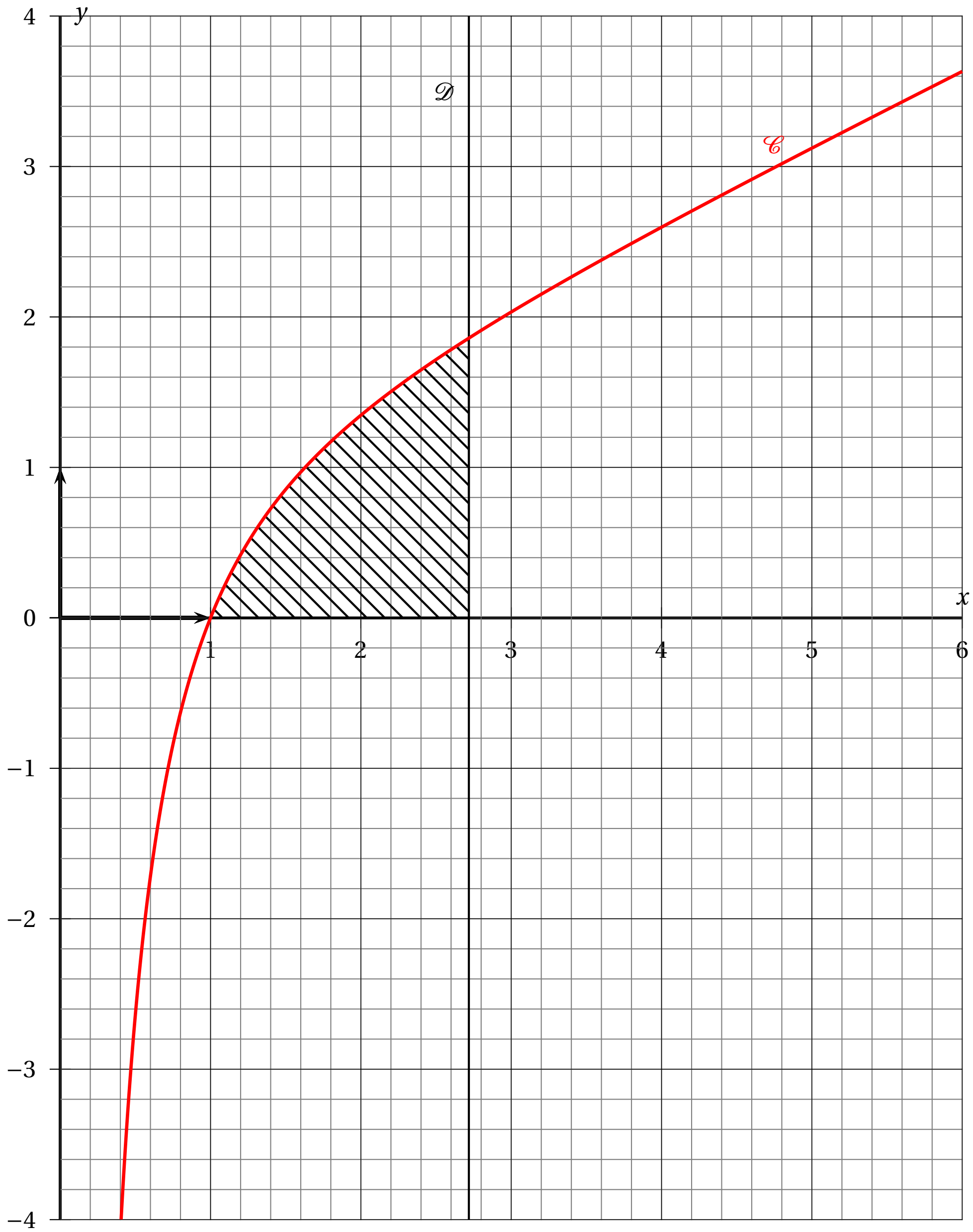
   b. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a.** Puisque $x \neq 0$, f est une somme de fonctions dérivables et est donc dérivable sur I :
   $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x - 1)}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 2\ln x + 4}{2x^2} = \frac{g(x)}{4}$.

   b. On a vu dans la partie A que sur I, $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur I et la fonction f est croissante

   c. $f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\ln 1 - 1}{1} = 1 - 1 = 0$.
   Comme f est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que $f(1) = 1$, on en déduit que :
   - $f(x) < 0$ si $0 < x < 1$;
   - $f(1) = 0$;
   - $f(x) > 0$ si $x > 1$.

3.



Partie C

1. Sur I, F est dérivable et :
$F'(x) = 2 \times \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times 2[\ln(x) - 1] \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln(x) - 1}{x} = f(x)$.
F est donc une primitive de f sur I.
2. Voir la figure plus haut.
3. $F(\mathrm{e}) - F(1) = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Comme l'unité d'aire est 2×2 (cm^2), $A = 4\,[F(\mathrm{e} - F(1)]$ est égale à l'aire de la surface hachurée en cm^2. On a $F(\mathrm{e}) - F(1) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e} + \dfrac{1}{2}[\ln(\mathrm{e}) - 1]^2 - \left[\dfrac{1}{4}1^2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}[0-1]^2\right] = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} + \dfrac{\mathrm{e}}{2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} =$
$\dfrac{\mathrm{e}^2}{4} + \dfrac{\mathrm{e}}{2} - \dfrac{5}{4}$.

Donc $A = \text{e}^2 + 2\text{e} - 5 \approx 7,825 \approx 7,83$ cm^2.