Durée : 4 heures

Corrige du baccalauréat STI Génie civil juin 2008
Antilles–Guyane

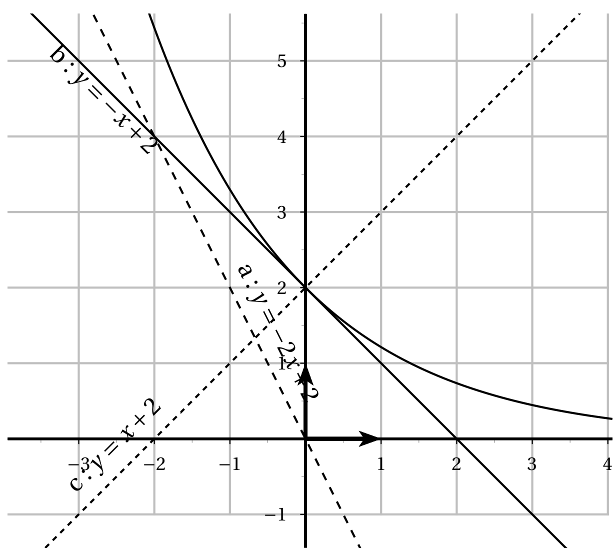
EXERCICE 1 **4 points**

Questionnaire à choix multiples

Quelques remarques de stratégie :
Puisqu'aucune justification n'est demandée, il faut user de sa calculatrice pour deviner, quand cela est possible, les réponses !
De plus, aucun point n'est enlevé en cas de mauvaises réponses, donc il ne faut pas hésiter à proposer une réponse.
Question 1 :
Réponse a. : Comme $2y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y \Leftrightarrow y(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$
Réponse b. : Comme $2y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}y \Leftrightarrow y(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$
Réponse c. : Comme $y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = y \Leftrightarrow y(x) = k\mathrm{e}^{x}$.
La bonne réponse est la **b)**.

Question 2 :
La courbe $\mathscr{C}$ a pour asymptote la droite d'équation **Réponse c.** : $y = 0$ (lecture graphique d'asymptote).

Question 3 : Voici une copie de l'écran de la calculatrice où sont tracées la courbe de f et les trois droites



Comme on peut le voir la seule droite qui peut être la tangente en 0 est la **b) :y=-x+2**

Question 4 : Utilisons encore la calculatrice pour calculer cette fois l'intégrale, on obtient en unité de volume :

$$V \approx 10,86$$

C'est à dire en cm^3 compte tenu de l'unité graphique de 2 cm sur chacun des trois axes :

$$V \approx 10,86 \times 2^3 = 86,92 \approx 32\pi\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)$$

Ainsi, la bonne réponse est la **c)**.

EXERCICE 2 **5 points**

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes suivants

$$Z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i},\ \ Z_2 = \frac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} \text{ et } Z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

1. Module de Z_1 : :

$$|Z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Un argument θ du nombre complexe Z_1 vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ -\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

Donc,

$$Z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

2. a.

$$Z_2 = \frac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \frac{6+2\mathrm{i}+3\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{3^2+1^2} = \frac{5+5\mathrm{i}}{10} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i} = \overline{Z_1}$$

b. Comme $Z_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{\pi}{4}\right]$, alors $\overline{Z_1} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\frac{\pi}{4}\right]$, donc :

$$Z_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

3. Comme $Z_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\pi}{6}\right]$, alors

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{array}\right. \Rightarrow Z_3 = \frac{3}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

4. On note Z le nombre complexe défini par : $Z = Z_2Z_3$.

a. Comme $Z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $Z_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, donc :

$$Z = Z_2Z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; \frac{\pi}{12}\right]$$

b. Comme $Z_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ et $Z_3 = \frac{3}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}$, alors :

$$Z = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{3}{4}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\mathrm{i}\left(\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

Ainsi,

$$Z = \left[\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; \frac{\pi}{12}\right] = \frac{3}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\mathrm{i}\left(\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

c. Donc,

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{12}\\ \frac{3}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{12}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\end{array}\right.$$

PROBLÈME **11 points**

PARTIE A

Recherche de l'expression de $f(x)$

1. $f(1)=1$ car le point de coordonnées $(1;1)$ est un point de la courbe.
   $f'(1)=1=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1.
   $f'(2)=0$ tangente horizontale au point d'abscisse 2.
2. Comme $f(x)=a\ln x+bx+\frac{c}{x}$, alors

$$f'(x)=\frac{a}{x}+b-\frac{c}{x^2}.$$

3. Comme $f(x)=a\ln x+bx+\dfrac{c}{x}$, alors :

$$f(1)=1\Leftrightarrow a\underbrace{\ln 1}_{=0}+b\times 1+\frac{c}{1}=1\Leftrightarrow b+c=1.$$

Comme $f'(x)=\frac{a}{x}+b-\frac{c}{x^2}$, alors :

$$f'(1)=1\Leftrightarrow \frac{a}{1}+b-\frac{c}{1^2}=1\Leftrightarrow a+b-c=1.$$

Comme $f'(x)=\frac{a}{x}+b-\frac{c}{x^2}$, alors :

$$f'(2)=0\Leftrightarrow \frac{a}{2}+b-\frac{c}{2^2}=0\Leftrightarrow \frac{a}{2}+b-\frac{c}{4}=0\Leftrightarrow 2a+4b-c=0.$$

4. Ainsi les nombres réels a, b et c sont solutions du système S suivant :

$$S:\quad\left\{\begin{array}{rcl}b+c&=&1\\ a+b-c&=&1\\ 2a+4b-c&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}b&=&1-c\\ a+1-c-c&=&1\\ 2a+4(1-c)-c&=&0\end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\left\{\begin{array}{rcl}b&=&1-c\\ a&=&2c\\ 4c+4(1-c)-c&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}c&=&4\\ b&=&1-4=-3\\ a&=&2\times 4=8\end{array}\right.$$

5. On a donc $f(x)=8\ln x-3x+\dfrac{4}{x}$.

PARTIE B

étude de la fonction f

Dans la suite du problème la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,\infty[$ par :

$$f(x)=8\ln x-3x+\frac{4}{x}.$$

1. Comme $f(x) = x\left(8\frac{\ln x}{x} - 3\right) + \frac{4}{x}$ et,

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 8\frac{\ln x}{x} - 3 = -3$

Mais, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc en multipliant avec le résultat précédent,

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(8\frac{\ln x}{x} - 3\right) = -\infty$$

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

2. Comme $f(x) = 8\ln x - 3x + \dfrac{4}{x} = \frac{8x\ln x - 3x^2+4}{x} = (8x\ln x - 3x^2 + 4) \times \frac{1}{x}$, et :

$\displaystyle\lim_{x\to0} x\ln x = 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to0} 8x\ln x - 3x^2 + 4 = 4$, mais, $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, alors

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$$

Ainsi, $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

3. Comme $f(x) = 8\ln x - 3x + \frac{4}{x}$, alors

$$f'(x) = \frac{8}{x} - 3 - \frac{4}{x^2} = \frac{8x - 3x^2 - 4}{x^2} = \frac{-3x^2 + 8x - 4}{x^2}.$$

De plus,

$$(3x-2)(2-x) = 6x - 3x^2 - 4 + 2x = -3x^2 + 8x - 4$$

, ainsi :

$$f'(x) = \frac{(3x-2)(2-x)}{x^2}.$$

Et,

x	0		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
signe de $3x-2$		-	0		+		
signe de $2-x$			+		0	-	
signe de x^2				+			
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	
variation de f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Sur l'intervalle $[4;5]$, on a :

x	4		5
f	$f(4) > 0$	$\searrow$	$f(5) < 0$

D'après ce tableau qui résume dérivabilité et stricte monotonie, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution, notée α.

De plus,

x	4,06	4,07	4,08	4,09
$f(x)$	0,0146	0,0018	-0,01	-0,023

Donc, un encadrement de la solution α d'amplitude 10^{-1} est :

$$4,07 < \alpha < 4,08.$$