Corrigé du baccalauréat STL Métropole Biotechnologies
20 juin 2013

La calculatrice (conforme à la circulaire N° 99-186 du 16-11-99) est autorisée.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 — 4 points

Le responsable d'un site de compostage fait un bilan de l'évolution des quantités de déchets compostés dans son entreprise.
Il constate qu'en 2002, sur le site, 5 900 tonnes de déchets ont été traitées et qu'ensuite les quantités traitées augmentent régulièrement de 15 % par an.
On admet que la progression se poursuivra au même rythme jusqu'en 2020.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en tonnes, de déchets traités durant l'année $2002 + n$. On aura ainsi $u_0 = 5900$.

1. Le coefficient multiplicateur lié à une évolution de 15 % est 1,15, par conséquent chaque année la quantité de déchets traités est multipliée par 1,15. Nous avons alors $u_{n+1} = 1{,}15u_n$.

   La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5900$ et de raison 1,15.

   Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0q^n$.
   $u_n = 5900 \times (1{,}15)^n$.

2. Calculons la quantité de déchets traités en 2006. En 2006, $n = 4$ d'où

   $u_4 = 5900 \times (1{,}15)^4 \approx 10319$.

3. Déterminons à partir de quelle année la quantité de déchets traités dépassera les 20 000 tonnes. Pour ce faire, résolvons $5900 \times (1{,}15)^n \geqslant 20000$.

   $5900 \times (1{,}15)^n \geqslant 20000 \iff 1{,}15^n \geqslant \frac{20000}{5900} \iff 1{,}15^n \geqslant \frac{200}{59} \iff n\ln 1{,}15 \geqslant \ln\frac{200}{59} \iff n \geqslant \frac{\ln\frac{200}{59}}{\ln 1{,}15}$. Or $\frac{\ln\frac{200}{59}}{\ln 1{,}15} \approx 8{,}73$.

   En 2011, la quantité de déchets traités dépassera les 20 000 tonnes.

4. Calculons la quantité totale, notée $\mathscr{S}$, de déchets traités depuis le début de l'année 2002 jusqu'à la fin de l'année 2020. En 2020, $n = 18$.

   $u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n = u_0 \times \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$. $\quad \mathscr{S} = u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+u_{18} = 5900 \times \dfrac{1{,}15^{19}-1}{1{,}15-1} \approx 520450$.

EXERCICE 2 — 5 points

On introduit un inoculum bactérien dans un bioréacteur contenant un milieu de culture. On mesure la population bactérienne toutes les heures à partir de la troisième heure. Le tableau suivant donne le résultat de ces mesures.

Temps t_i en heures	3	4	5	6	7	8	9
Nombre N_i de bactéries	$1,09 \times 10^5$	$2,68 \times 10^5$	$7,31 \times 10^5$	$2,2 \times 10^6$	$6,93 \times 10^6$	$1,79 \times 10^7$	$5,12 \times 10^7$

1. Complétons le tableau suivant, les valeurs étant arrondies à 10^{-2} près.

Temps t_i en heures	3	4	5	6	7	8	9
$y_i = \ln(N_i)$	11,60	12,50	13,50	14,60	15,75	16,70	17,75

2. Traçons dans le repère orthonormé donné en annexe, page 6, le nuage de points $\mathrm{M}_i(t_i\ ,\ y_i)$ en prenant comme unité 1 cm sur chaque axe.

3. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés est $y = 1{,}04t + 8{,}39$, les coefficients étant arrondis à 10^{-2} près. Cette droite est tracée dans le repère précédent.

4. On suppose que l'évolution du nombre de bactéries se poursuit suivant le même modèle jusqu'à ce que les éléments nutritifs commencent à manquer.

a. Déterminons, à 10^6 près, le nombre de bactéries dans le bioréacteur au bout de 11 heures.

Calculons la valeur de y pour $t = 11.y = 1,04 \times 11 + 8,39 = 19,83$.

Sachant que $y_i = \ln(N_i)$ nous avons donc $N_i = \text{e}^{y_i}$ d'où $N = \text{e}^{19,83} \approx 409 \times 10^6$.

Au bout de onze heures il y a environ quatre cent neuf millions de bactéries.

b. Les éléments nutritifs commencent à manquer dès que le nombre de bactéries atteint 3×10^9.

Déterminons d'abord la valeur de y correspondant à cette quantité de bactéries. $y = \ln(3 \times 10^9) \approx 21,82$.

Résolvons maintenant l'équation $1,04t + 8,39 = 21,82$. Nous trouvons $t = \dfrac{21,82 - 8,39}{1,04} \approx 12,91$.

Les éléments nutritifs commenceront à manquer au début de 13 heures.

EXERCICE 3 **5 points**

Une société fabrique des tubes à essai.
Une étude a montré que la probabilité pour un tube, pris au hasard dans la production, de présenter un défaut est égale à 0,03.
On suppose la production suffisamment importante pour assimiler chaque prélèvement à un tirage avec remise.

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

Dans cet exercice, toutes les probabilités seront arrondies à 10^{-3} *près.*

1. On prélève 10 tubes dans la production. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tubes défectueux dans le prélèvement.

a. La loi de probabilité de X est une loi binomiale car il s'agit d'une répétition de n séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues de probabilité p et q telles que $p + q = 1$.

L'issue réalisant la réussite est : « le tube présente un défaut ». Le nombre n de prélèvements est 10 et la probabilité que le tube présente un défaut est 0,03.

Nous avons donc une loi binomiale de paramètres $(10 ; 0,03)$ par conséquent $p(X = k) = \binom{10}{k}0,03^k(0,97)^{10-k}$.

b. Déterminons la probabilité $p(X = 1)$.

$p(X = 1) = \binom{10}{1}(0,03)(0,97)^9 \approx 0,228$.

c. Déterminons la probabilité que, parmi les 10 tubes, un tube au moins présente un défaut c'est-à-dire déterminons $p(X \geqslant 1)$.

$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,97^{10} \approx 0,263$.

2. On prélève 300 tubes dans la production. On décide d'approcher la variable aléatoire donnant le nombre de tubes défectueux dans le prélèvement par la variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 9 et d'écart type 3.

a. Déterminons la probabilité que le prélèvement contienne entre 6 et 12 tubes défectueux.

Calculons $p(6 \leqslant Y \leqslant 12)$.

En utilisant les résultats d'une calculatrice pour la loi normale, $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(9 ; 3)$ nous obtenons

$p(6 \leqslant Y \leqslant 12) \approx 0,683$.

b. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de tubes défectueux pour un échantillon de taille 300.

Si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$, $n(1-p) \geqslant 5$ nous pouvons approximer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 par l'intervalle :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \; ; \; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Nous avons $n = 300$, $np = 300 \times 0,03 = 9$, $300 \times (1-0,03) = 291$. Les conditions étant remplies, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 est

$$\left[0,03 - 1,96\sqrt{\frac{0,03 \times 0,97}{300}}\ ;\ 0,03 + 1,96\sqrt{\frac{0,03 \times 0,97}{300}}\right] = [0,011\ ;\ 0,049]$$

les bornes de l'intervalle sont arrondies à 10^{-3} près.

c. Le responsable qualité veut vérifier la production. Pour cela, il prélève un échantillon de 300 tubes. Dans cet échantillon, 14 tubes sont défectueux. Calculons la valeur observée de proportion de tubes défectueux dans l'échantillon. Nous obtenons $\dfrac{14}{300} \approx 0,047$.
Cette valeur appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, donc il ne doit pas faire procéder à un réglage des machines.

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A : Lecture graphique

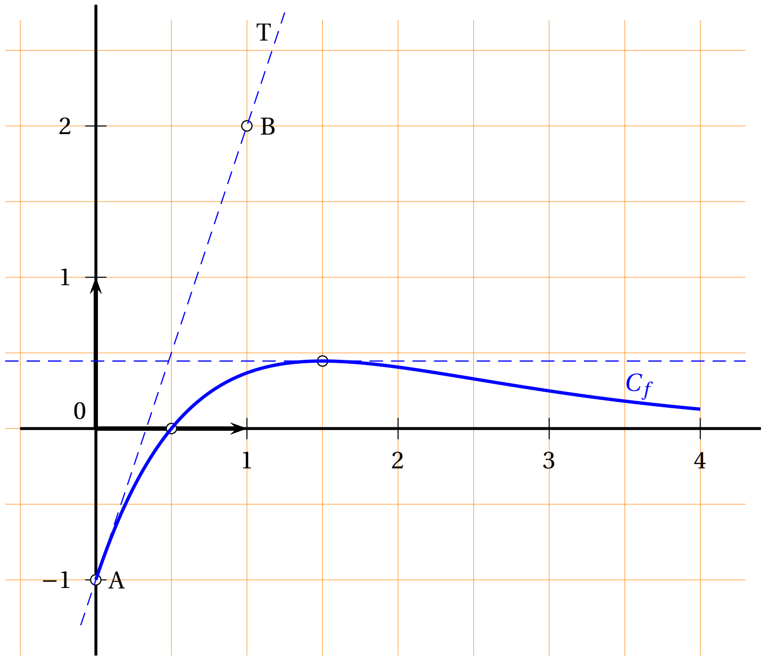
La courbe C_f tracée ci-dessous est la représentation graphique sur $[0\ ;\ 4]$ d'une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On admet que :

La courbe C_f coupe l'axe des abscisses en $\frac{1}{2}$.

La tangente T à la courbe C_f au point A $(0\ ,\ -1)$ passe par le point B $(1\ ,\ 2)$.

La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Dressons le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ,\ 4]$.

x	0		$\frac{1}{2}$		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	

En effet sur $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right[$ la courbe est située en dessous de l'axe des abscisses et sur $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ elle est située au dessus.

2. $f'(0)$ est le coefficient directeur de la droite (AB) puisque celle-ci est tangente à la courbe au point d'abscisse 0. Nous lisons 3, $f'(0) = 3$.
   $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ car la tangente au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B : Étude de la fonction

On admet que la fonction f est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. **a.** On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x\mathrm{e}^{-x} - \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0 - 0 = 0$.
   b. Lorsque x tend vers $+\infty$ la courbe représentative de f est asymptote à l'axe des abscisses.

2. La fonction f' désigne la fonction dérivée de f.
   a. Déterminons $f'(x)$.
   $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + (2x-1)\Big((-1)\mathrm{e}^{-x}\Big) = \Big(2-(2x-1)\Big)\mathrm{e}^{-x} = (3-2x)\mathrm{e}^{-x}$.
   b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $3-2x$. Sur $\mathbb{R}$, $(3-2x>0) \iff \left(x < \frac{3}{2}\right)$. Il en résulte :
   Si $x \in \left[0\,;\,\frac{3}{2}\right[$, $f'(x) > 0$ et si $x \in \left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, $f'(x) < 0$.
   c. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
   $f'(x) < 0$ pour $x \in \left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
   $f'(x) > 0$ pour $x \in \left[0\,;\,\frac{3}{2}\right[$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
   Dressons maintenant le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\frac{2}{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\searrow$	0

Partie C : Calcul d'aire

On donne ci-dessous les tableaux de variation et des tableaux de valeurs de trois fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$: F_1, F_2 et F_3.

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$F_1(x)$	3	$\searrow$	$\frac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$F_1(x)$	3	0	$\frac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\frac{1}{\mathrm{e}^2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$F_2(x)$	-1	$\searrow$	$\frac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\nearrow$	0

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$F_2(x)$	-1	$\frac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$-4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$	$-\frac{5}{\mathrm{e}^2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$F_3(x)$			$\sqrt{\mathrm{e}}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$\frac{3}{2}$				$-\infty$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$F_3(x)$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{\mathrm{e}}$	0	$-\frac{\mathrm{e}^2}{2}$

1. Une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$ est F_2. En A 2. nous avons obtenu le signe de f ou de F'. En utilisant les théorèmes cités supra, F est strictement décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

2. À l'aide de cette fonction, calculons l'aire, $\mathscr{A}$, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C_f, les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 2$.

Pour tout x appartenant à cet intervalle, $f > 0$, par conséquent l'aire du domaine défini précédemment est en unités d'aire $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F_2(x)\Big]_{\frac{1}{2}}^{2} = F_2(2) - F_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{\mathrm{e}^2} - \left(-\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) = \frac{2\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}} - 5}{\mathrm{e}^2} \approx 0{,}54$$

. L'aire $\mathscr{A}$ vaut à 10^{-2} près 0,54u.a.

EXERCICE 2 **Annexe(à rendre avec la copie)**