∽ Corrigé du baccalauréat STL Métropole 17 juin 2011 ∾
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

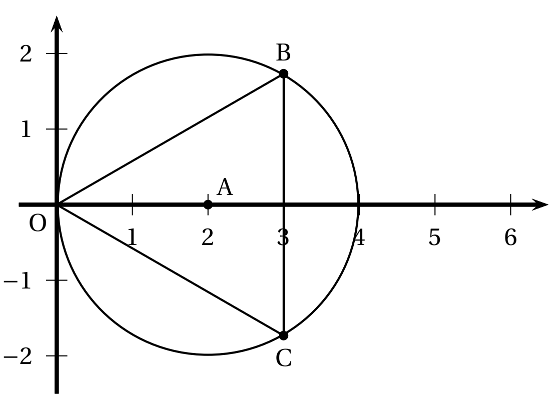
EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

1. $P(2) = 2^3 - 8 \times 2^2 + 24 \times 2 - 24 = 8 + 48 - 32 - 24 = 0$.
2. $(z-2)\left(z^2 + az + b\right) = z^3 - a^2 + bz - 2z^2 + 2az - 2b$. En identifiant les termes de même degré, on obtient le système :
$\left\{\begin{array}{lcl} a+2 & = & 8 \\ 2a+b & = & 24 \\ -2b & = & -24 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 6 \\ b & = & 12 \end{array}\right.$.
On a donc $P(z) = z^3 - 8z^2 + 24z - 24 = (z-2)\left(z^2 + 6z + 12\right)$.
3. On a : $\Delta = 6^2 - 4 \times 12 = -12 = \left(2\text{i}\sqrt{3}\right)^2$. Il y a donc deux racines complexes conjuguées :
$$\frac{6 - 2\text{i}\sqrt{3}}{2} = 3 - \text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 3 + \text{i}\sqrt{3}$$
4. $P(z) = 0 \iff z^2 - 6z + 12 = 0 \iff (z-2)\left(z^2 + 6z + 12\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-2 & = & 0 \\ z^2 + 6z + 12 & = & 0 \end{array}\right.$
Donc d'après la question précédente les solutions sont donc
$$\left\{2 \quad ; \quad 3 - \text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad 3 + \text{i}\sqrt{3}\right\}$$

Partie B

1.



2. **a.** $|z_{\text{B}}|^2 = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12 \Rightarrow |z_{\text{B}}| = 2\sqrt{3}$.
Avec $\arg z_{\text{B}} = \alpha$, on a $\cos\alpha = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$, d'où $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.
Un argument de z_{B} est donc $\dfrac{\pi}{6}$.
b. On a $z_{\text{C}} = \overline{z_{\text{B}}}$, on en déduit que :
$|z_{\text{C}}| = 2\sqrt{3}$ et un argument de z_{C} est $-\dfrac{\pi}{6}$.

3. On vient de démontrer que OB = OC = $2\sqrt{3}$, donc le triangle OBC est isocèle en O.
D'autre part $\left(\overrightarrow{\text{OC}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. L'angle au sommet mesurant $\dfrac{\pi}{3}$, il en de même pour les deux autres. Conclusion le triangle OBC est équilatéral.

4. *Méthode* 1 : On a OA = 2.
D'autre part $\text{AB}^2 = |z_\text{B} - z_\text{A}|^2 = \left|1 + \text{i}\sqrt{3}\right|^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \text{AB} = 2$.
De même $\text{AC}^2 = |z_\text{B} - z_\text{A}|^2 = \left|1 - \text{i}\sqrt{3}\right|^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \text{AC} = 2$.
Conclusion AO = AB = AC = 2 : ceci montre que les points O, B et C appartiennent au cercle de centre A et de rayon 2.
Méthode 2 : dans le triangle équilatéral OBC, la droite (OA) est médiatrice, hauteur et médiane : elle contient donc le centre de gravité du triangle situé à une distance égale aux 2/3 de cette médiane à partir du sommet O, médiane dont la mesure est 3 : le centre de gravité est donc le point A qui est aussi l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit au triangle OBC le rayon étant égal à $\dfrac{2}{3} \times 3 = 2$.

EXERCICE 2 **4 points**

Partie A

1.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,917	0,062	0,016	0,005

2. a. $\text{E}(X) = 0 \times 0,917 + 1 \times 0,062 + 2 \times 0,016 + 3 \times 0,005 = 0,109$.

b. Calcul de la variance $V(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} k^2 \times P(X = k) - \text{E}(X)^2 =$
$0^2 \times 0,917 + 1^2 \times 0,062 + 2^2 \times 0,016 + 3^2 \times 0,005 - 0,109^2 = 0,159\,119$, d'où
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,159\,119} \approx 0,399$ à 10^{-3} près.

Partie B

1. On a $y_k = 350 - 100 - 40k$ ce qui permet de trouver les quatre valeurs prises par la variable aléatoire Y : 250, 210, 170, 130.

2. D'où le tableau suivant :

y_k	250	210	170	130
$P\left(Y = y_k\right)$	0,917	0,016	0,060	0,005

3. On a $\text{E}(Y) = 250 \times 0,917 + 210 \times 0,062 + 170 \times 0,016 + 130 \times 0,005 = 245,64$.

4. Une estimation du bénéfice que l'entreprise peut espérer faire sur la vente d'un article étant de 265,64 €, on peut espérer pour une vente de 10 000 articles un bénéfice de 2 456 400 €.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. Un tableau de variations possible de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$			0		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

2. Ce tableau semble suggérer que f est négative sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. $f(x) = 1 + x - \text{e}^{2x}$ entraîne $f'(x) = 1 - 2\text{e}^{2x}$
2. $1 - 2\text{e}^{2x} \geqslant 0 \iff 1 \geqslant 2\text{e}^{2x} \iff \dfrac{1}{2} \geqslant \text{e}^{2x}$ et par croissance de la fonction logarithme népérien les deux membres étant positifs $\ln\dfrac{1}{2} \geqslant 2x \iff x \leqslant \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2} \iff x \leqslant -\dfrac{\ln 2}{2}$.
   On en déduit que $f'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant -\dfrac{\ln 2}{2}$, donc la fonction f est croissante sur $\left]-\infty\,;\, -\dfrac{\ln 2}{2}\right[$.
   Un calcul analogue montre que f est décroissante sur $\left]\dfrac{\ln 2}{2}\,;\, +\infty\right[$.
3. **a.** On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1 + x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{2x} = 0$, d'où par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
   b. $1 + \text{e}^x\left(\dfrac{x}{\text{e}^x} - \text{e}^x\right) = 1 + x - \text{e}^x \times \text{e}^x = 1 + x - \text{e}^{2x} = f(x)$.
   Or on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\text{e}^x} = 0$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^x = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\text{e}^x} - \text{e}^x = -\infty$ et par produit de limites
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^x\left(\dfrac{x}{\text{e}^x} - \text{e}^x\right) = -\infty$ et finalement par somme de limites
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
4. **a.** On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$f(x)$			$\frac{1-\ln 2}{2}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

   b. La fonction f est croissante, continue sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\, -\frac{\ln 2}{2}\right[$. Or $\dfrac{1-\ln 2}{2} \approx 0,15$, donc $\dfrac{1-\ln 2}{2} > -0,7$, donc la fonction f est continue croissante sur l'intervalle $]-0,8\,;\,-0,7[$.
   Comme $f(-0,8) \approx -0,0019 < 0$ et $f(-0,7) \approx 0,534 > 0$ le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe une valeur unique $\alpha \in]-0,8\,;\,-0,7[$ telle que $f(\alpha) = 0$.
   c. On a $f(0) = 1 + 0 - \text{e}^{2\times 0} = 1 - 1 = 0$.
   $f\left(-\frac{\ln 2}{2}\right) = 1 - \frac{\ln 2}{2} - \text{e}^{-\ln 2} = 1 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1-\ln 2}{2} \approx 0,154 \approx 0,2$ à 10^{-1} près.
   d. Finalement le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	α	$-\frac{\ln 2}{2}$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$\frac{1-\ln 2}{2}$	0	$-\infty$

On a donc $f(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\,0[$ et $f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,\alpha[\cup]0\,;\,+\infty[$.

5. La conjecture énoncée à la partie A est fausse, car l'écran de la calculatrice ne permet pas de voir que la fonction est positive sur l'intervalle $[\alpha\,;\,0[$.
6. Voir le graphique à la fin.

Partie C

1. Voir ci-dessous.
2. Sur $\mathbb{R}$, on a $F'(x) = 1 + 2 \times \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \times 2 \times \mathrm{e}^{2x} = 1 + x - \mathrm{e}^{2x} = f(x)$.
   F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. Sur l'intervalle $[-0,5\,;\,0]$ la fonction f est positive, donc l'aire de la surface hachurée est égale en unité d'aire à l'intégrale :
   $\displaystyle\int_{-0,5}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{-0,5}^{0} = F(0) - F(-0,5) =$
   $0 + \dfrac{1}{2}0^2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times 0} - \left(-\frac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{2\mathrm{e}} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{4-\mathrm{e}}{8\mathrm{e}}$ (unité d'aire).
   Rem. On a $\dfrac{4-\mathrm{e}}{8\mathrm{e}} \approx 0,059$ ce qui correspond à à peu près un carreau sur la figure.