Corrigé du baccalauréat STL spécialité biotechnologies
Antilles-Guyane - 18 juin 2019

EXERCICE 1 **(5 points)**

Une entreprise fabrique des dés cubiques non pipés pour des jeux de société.

1. La masse X d'un dé, en grammes, suit la loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart type $\sigma = 0{,}05$. On prélève un dé au hasard dans la production.

a. La probabilité que ce dé ait une masse comprise entre 7,9 grammes et 8,1 grammes est $P(7{,}9 \leqslant X \leqslant 8{,}1) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$ d'après le cours.

b. La probabilité que ce dé ait une masse supérieure à 7,95 grammes est $P(X \geqslant 7{,}95) \approx 0{,}84$.

Maintenant, on colle une étiquette rouge sur l'une des faces d'un dé prélevé et des étiquettes blanches sur les cinq autres.

2. On lance 10 fois ce dé et on note Y le nombre de faces rouges obtenues.

Pour un lancer, la face rouge a une probabilité de $p = \dfrac{1}{6}$ d'arriver.

a. Chaque épreuve n'a que deux issues : la face est rouge, avec une probabilité de $p = \dfrac{1}{6}$, ou la face n'est pas rouge avec une probabilité de $1 - p = \dfrac{5}{6}$.

On répète cette épreuve 10 fois donc la variable aléatoire Y qui donne le nombre de faces rouges obtenues suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{6}$.

b. La probabilité d'obtenir exactement trois faces rouges est :

$P(Y = 3) = \dbinom{10}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\left(1 - \dfrac{1}{6}\right)^{10-3} \approx 0{,}155$

c. La probabilité d'obtenir au moins une face rouge s'obtient en calculant la probabilité de l'évènement contraire : obtenir 0 face rouge.

La probabilité cherchée est donc $1 - P(Y = 0) = 1 - \dbinom{10}{0}\left(\dfrac{1}{6}\right)^0\left(1 - \dfrac{1}{6}\right)^{10} = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}838$.

3. Une personne lance 120 fois ce dé et obtient 29 fois la face rouge. Elle affirme que ce dé est pipé.

On teste donc cette hypothèse sur un échantillon de taille $n = 120$, sachant que la probabilité d'obtention de la face rouge est $p = \dfrac{1}{6}$.

$n = 120 \geqslant 30$, $np = 20 \geqslant 5$ et $n(1 - p) = 100$, donc on peut utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 5 %.

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[\dfrac{1}{6} - 1{,}96\sqrt{\dfrac{\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}{120}}\ ;\ \dfrac{1}{6} + 1{,}96\sqrt{\dfrac{\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}{120}}\right]$$

$[0{,}0999\ ;\ 0{,}2333]$

La fréquence dans l'échantillon est $f = \dfrac{29}{120} \approx 0{,}242$; cette valeur n'appartient pas à l'intervalle I donc on peut soupçonner que le dé est pipé.

EXERCICE 2 **5 points**

Lors d'une expérience de chimie, on mesure le pH de différentes solutions obtenues en mélangeant une solution d'acide acétique et une solution d'acétate de sodium. On note V_A et V_S les volumes respectifs, en mL, de solution d'acide acétique et de solution d'acétate de sodium mélangés pour préparer chaque solution.

Le tableau suivant donne le pH de chaque solution obtenue en fonction du rapport des volumes $\dfrac{V_A}{V_S}$.

Numéro de la solution	N° 1	N° 2	N° 3	N° 4	N° 5	N° 6
Rapport des volumes $k_i = \frac{V_A}{V_S}$	0,1	0,25	1	2	5	10
pH du mélange y_i	3,7	4,1	4,7	5	5,4	5,7

1. Un ajustement affine n'étant pas judicieux, on pose $x_i = \ln(k_i)$.

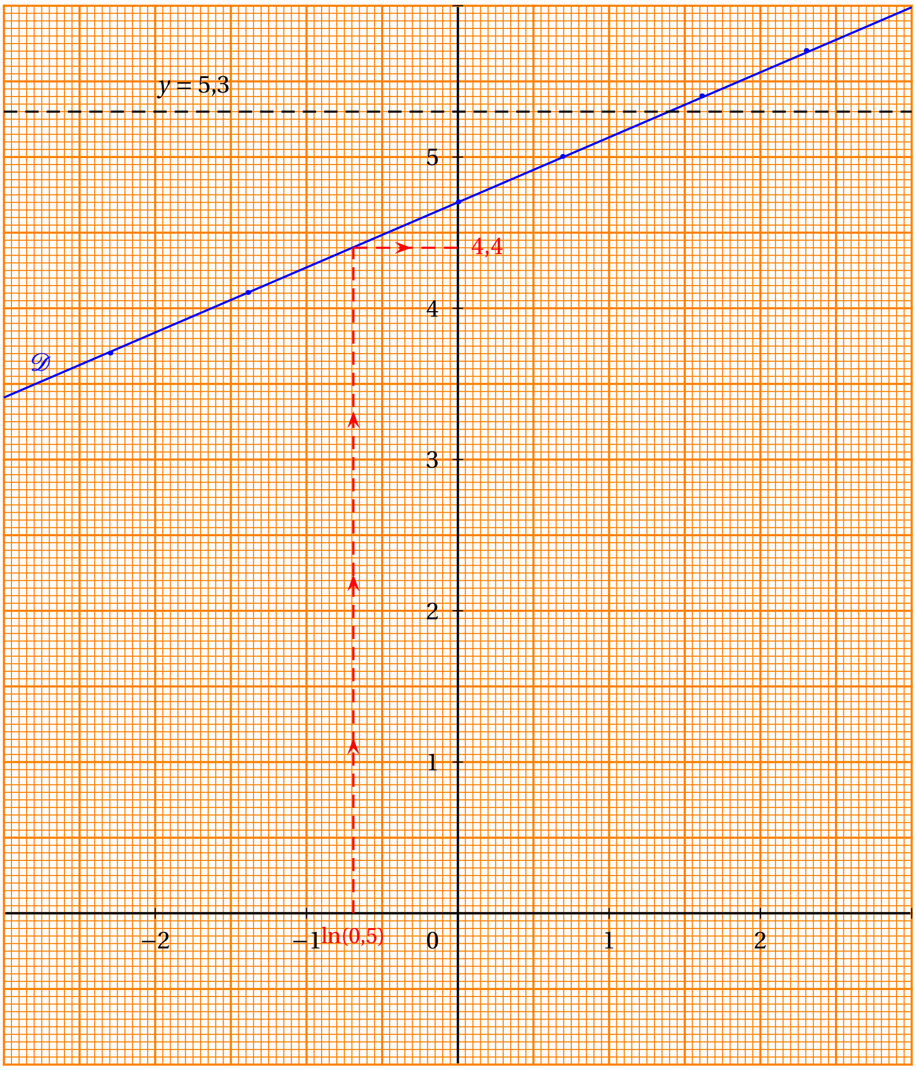
$x_i = \ln(k_i)$	$-2{,}30$					
y_i	3,7	4,1	4,7	5	5,4	5,7

a. Dans la case grisée, il faut mettre $\ln(10)$ et on sait que $\ln(0{,}1) = -2{,}30$.
La propriété de la fonction ln que l'on va utiliser est :
pour a et b strictement positifs, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

$$\ln(0{,}1) = -2{,}30 \iff \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -2{,}30 \iff \ln(1) - \ln(10) = -2{,}30 \iff -\ln(10) = -2{,}30$$
$$\iff \ln(10) = 2{,}30$$

b. On complète le tableau sur l'**annexe, page ??**.

2. On représente sur une feuille de papier millimétré le nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.



3. a. Une équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés dont les coefficients sont arrondis à 10^{-4} près est $y = 0{,}4343x + 4{,}7008$.

b. On trace la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 0{,}43x + 4{,}70$ dans le repère précédent.

4. a. On veut déterminer graphiquement une estimation du pH lorsque le rapport des volumes $\dfrac{V_A}{V_S}$ est égal à 0,5. Si $\dfrac{V_A}{V_S} = 0{,}5$, alors $x_i = \ln(0{,}5) = -\ln(2) = -0{,}69$.
Voir graphique ci-dessus. On peut estimer le pH à environ 4,4.

b. Lorsque le volume d'acétate de sodium est 5 fois plus important que le volume d'acide acétique, on a $k = \dfrac{V_A}{V_S} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$; donc $x = \ln(k) = \ln(0{,}2)$.

Le pH est alors estimé à : $0{,}43 \times \ln(0{,}2) + 4{,}7 \approx 4{,}01$.

5. Le rapport des volumes pour lequel le pH du mélange est de 5,3 est le nombre k tel que $0{,}43 \times \ln(k) + 4{,}7 = 5{,}3$ soit $\ln(k) = \dfrac{0{,}6}{0{,}43}$ ou encore $k = \text{e}^{\frac{0{,}6}{0{,}43}}$, ce qui donne environ 4.

EXERCICE 3 — 5 points

Un marchand de cycles désirant commercialiser des Vélos à Assistance Électrique (VAE) étudie une enquête donnant le nombre des ventes de ce produit dans une région entre 2014 et 2017.
Le résultat de cette enquête est donné dans le tableau ci-dessous :

Année	2014	2015	2016	2017
Nombre de VAE vendus en milliers d'unités	58,6	77,5	102	135

Partie A

1. Le pourcentage d'augmentation des ventes de VAE entre 2014 et 2015 est, en pourcentage, $\dfrac{77{,}5 - 58{,}6}{58{,}6} \times 100 \approx 32{,}3$.

2. Suite à son étude le commerçant estime que si l'évolution observée entre 2014 et 2015 reste la même sur les dix années à venir, on peut envisager une augmentation des ventes de 32 % par an entre 2017 et 2025.

Augmenter de 32 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{32}{100} = 1{,}32$.

En 2017 il s'est vendu 135 milliers de VAE.

En 2018 on peut estimer le nombre de VAE vendus à $135 \times 1{,}32$ soit 178 milliers.

En 2019 on peut estimer le nombre de VAE vendus à $178 \times 1{,}32$ soit 235 milliers.

Partie B

Le commerçant a finalement décidé de proposer à la vente un modèle de VAE à partir du 1er janvier 2018. En 2018, il a vendu 100 VAE et il estime que le nombre de ventes suivra la même évolution qu'à l'échelon régional, c'est-à-dire une progression de 32 % par an.

1. Il y a 7 années entre 2018 et 2025 donc, selon ce modèle, le nombre de VAE que vendra le commerçant est de $100 \times 1{,}32^7$ soit environ 698.

2. Le bénéfice réalisé par le commerçant pour chaque VAE vendu est de 150 euros en 2018, et augmentera ensuite de 2,5 % chaque année.

a. Le bénéfice réalisé par le commerçant en 2018 sur la vente de ses VAE est $100 \times 150 = 15\,000$ euros.

b. En 2019 le nombre de ventes attendu est de $100 \times 1{,}32 = 132$.

Le bénéfice par vélo est de $150 \times 1{,}025 = 153{,}75$.

Le bénéfice total est donc de $132 \times 153{,}75 = 20\,295$ euros.

c. On modélise par une suite v les bénéfices attendus sur la vente des VAE par ce commerçant. On appelle v_n le bénéfice sur la vente des VAE lors de l'année $2018 + n$. On admet que la suite v est une suite géométrique.

Chaque année, le nombre de vélos vendus augmente de 32 % ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de 1,32. Chaque année le bénéfice par vélo augmente de 2,5 %, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de 1,025.

Le bénéfice total correspond donc à un coefficient multiplicateur de $1{,}32 \times 1{,}025 = 1{,}353$. Ce qui veut dire que la suite v est géométrique de raison 1,353.

3. On complète sur l'**annexe page ??**, l'algorithme qui permettra au commerçant de connaître l'année où la somme cumulée des bénéfices attendus sur la vente des VAE depuis janvier 2018 dépassera 300 000 euros.

EXERCICE 4 **5 points**

Partie A

La solubilité s exprimée en pourcentage massique (% m· m^{-1}) du dioxyde de soufre dans l'eau en fonction de la température t en ° C est une solution de l'équation différentielle (E) : $\quad y'(t)+0{,}04y(t)=0$.

1. L'équation différentielle $y'+ay=0$ a pour solutions les fonctions définies par $y(t)=k\,\text{e}^{-at}$ où k est un réel quelconque, donc l'équation différentielle $y'(t)+0{,}04y(t)=0$ a pour solutions les fonctions définies par $y(t)=k\,\text{e}^{-0{,}04t}$ où k est un réel quelconque.
2. La solubilité à la température 0° C est de 23 %m · m$^-$1 , donc $y(0)=23$ ce qui veut dire $k\,\text{e}^{0}=23$ ou encore $k=23$. Donc $s(t)=23\,\text{e}^{-0{,}04t}$.

Partie B

On considère que la fonction solubilité s est définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par : $s(t)=23\,\text{e}^{-0{,}04t}$.
On désigne par $\mathscr{C}_s$, sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. On admet que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\text{e}^{-0{,}04t}=0$. Donc la limite de s en $+\infty$ est égale à 0, ce qui veut dire que la courbe $\mathscr{C}_s$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.
2. $s'(t)=23\times(-0{,}04)\,\text{e}^{-0{,}04t}=-0{,}92\,\text{e}^{-0{,}04t}<0$ sur $[0~;~+\infty[$ donc la fonction s est strictement décroissante sur $[0~;~+\infty[$.
3. La solubilité s du dioxyde de soufre en pourcentage massique sera inférieure à 2 quand $s(t)<2$; on résout cette inéquation :

   $$s(t)<2 \iff 23\,\text{e}^{-0{,}04t}<2 \iff \text{e}^{-0{,}04t}<\frac{2}{23} \iff -0{,}04t<\ln\left(\frac{2}{23}\right) \iff t>-\frac{\ln\left(\frac{2}{23}\right)}{0{,}04}$$

   $-\dfrac{\ln\left(\frac{2}{23}\right)}{0{,}04}\approx 61{,}1$ donc c'est à partir de 62° C que la solubilité s du dioxyde de soufre en pourcentage massique sera inférieure à 2.
4. La valeur moyenne de la fonction s entre a et b est donnée par : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b s(t)\,\text{d}t$.

   La fonction s a pour primitive sur $[0~;~+\infty[$ la fonction S définie par $S(t)=-\dfrac{23}{0{,}04}\,\text{e}^{-0{,}04t}=-575\,\text{e}^{-0{,}04t}$.

   La valeur moyenne de la fonction s entre 10 ° C et 30 ° C vaut donc :

   $$\frac{1}{30-10}\int_{10}^{30}s(t)\,\text{d}t=\frac{1}{20}\left[S(30)-S(10)\right]=\frac{1}{20}\left[-575\,\text{e}^{-1{,}2}+575\,\text{e}^{-0{,}4}\right]=\frac{575\left(\text{e}^{-0{,}4}-\text{e}^{-1{,}2}\right)}{20}\approx 10{,}6.$$

Annexe à numéroter et à remettre avec la copie
à la fin de l'épreuve même non complétée
(placer à l'intérieur de la copie pour agrafage)

EXERCICE 2 question 1.b.

Rapport des volumes $k_i = \frac{V_A}{V_S}$	0,1	0,25	1	2	5	10
$x_i = \ln(k_i)$	$-2{,}30$	$-1{,}39$	0	0,69	1,61	2,30
y_i	3,7	4,1	4,7	5	5,4	5,7

EXERCICE 3 Partie B question 3.

$A \longleftarrow 2018$
$B \longleftarrow 15\,000$
$S \longleftarrow 15\,000$
Tant que $S \leqslant 300\,000$
    $A \longleftarrow A+1$
    $B \longleftarrow B \times 1{,}353$
    $S \longleftarrow S+B$
Fin Tant que