∽ Corrigé du baccalauréat STL spécialité biotechnologies ∾
Antilles-Guyane 4 septembre 2020

L'usage de la calculatrice avec le mode examen activé est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

EXERCICE 1 **4 points**

1. On sait que $P(52,8 \leqslant G \leqslant 67,2) = 0,95$ signifie que $P(\mu - 2\sigma \leqslant G \leqslant \mu + 2\sigma) = 0,95$, μ et σ étant respectivement la moyenne t l'écart type.
On a donc $60 - 2\sigma = 52,8$, soit $2\sigma = 60 - 52,8$ ou $2\sigma 7,2$ et $\sigma = 3,6$.

Pour la suite de l'exercice, on arrondit : $\sigma = 4$. Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

2. On prélève un œuf au hasard dans ce centre.
   a. La calculatrice donne $P(53 < G < 63) \approx 73\,331$,soit $0,733\,1$ à à 10^{-4} près.
   b. De même $P(G > 73) \approx 0,000\,57$ soit $0,000\,6$ à 10^{-4} près.

   L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % est :
   $$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,37 - 1,96\sqrt{\frac{0,37 \times 0,63}{420}}\ ;\ 0,37 + 1,96\sqrt{\frac{0,37 \times 0,63}{420}}\right] \approx$$
   $[0,346\ ;\ 394]$.
   La fréquence de l'échantillon est $\dfrac{168}{420} = 0,4$.
   Comme $0,4 \notin [0,346\ ;\ 394]$, on peut remettre en cause l'affirmation du centre avicole.

EXERCICE 2 **5 points**

PARTIE A

1. Au temps $t = 0$, on injecte 3 UI. Au temps $t = 1$, il reste $3 \times \left(1 - \dfrac{20}{100}\right) = 3 \times 1 - 0,20) = 3 \times 0,8 = 2,4$ et à ce moment on injecte à nouveau 2 UI, donc $u_1 = 2,4 + 2 = 4$.

2. Parmi les formules proposées, reporter sur votre copie celle entrée en B3, qui, recopiée vers le bas, donne les valeurs successives de u_n :

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	4,4
4	2	5,52
5	3	
6	4	

   — formule 1 : = 0,2*B2 + 2,
   — formule 2 : = 0,8 * B2 + 2,
   — formule 3 : = 2*A3 + 3.

   Comme on l'a vu à la première question, on multiplie la quantité précédente par 0,8 et on ajoute 2 : c'est donc la formule 2.

3. On a donc pour $n > 0$, $u_{n+1} = 0,8u_n + 2$: la suite n'est pas géométrique, ce que confirme le tableur puisque $\dfrac{4,4}{3} \approx 1,467$ et $\dfrac{5,52}{4,4} \approx 1,255$.

PARTIE B

1. Si la suite v est une suite géométrique de raison 0,8, on sait que pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,8v_n$ et que $v_n = v_0 \times 0,8^n$.
Or $v_0 = u_0 - 10 = 3 - 10 = -7$, donc $v_n = -7 \times 0,8^n$, pour $n \geqslant 0$.
Or $v_n = u_n - 10$ peut s'écrire $u_n = v_n + 10$, donc finalement :
pour $n \geqslant 0$, $u_n = 10 - 7 \times 0,8^n$.

2. Comme $0 < 0,8 <$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 7\times 0,8^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10$.
3. Il faut trouver $n\mathbb{N}$, tel que $10 - 7\times 0,8^n \leqslant 8$, soit
   $2 \leqslant 7\times 0,8^n$ d'où $\dfrac{2}{7} \leqslant 0,8^n$ ou par croissance du logarithme népérien $\ln\left(\dfrac{2}{7}\right) < n\ln 0,8$ et
   enfin $\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{7}\right)}{\ln 0,8} > n$ (car $\ln 0,8 < 0$).
   Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{7}\right)}{\ln 0,8} \approx 5,6$.
   Il ne faut donc pas dépasser 6 injections ($u_5 \approx 7,71$).

EXERCICE 3 — 6 points

PARTIE A

On réalise l'expérience en mesurant la température du café, notée θ, contenu dans la tasse à différents instants t. Les résultats sont notés dans le tableau suivant :

Temps en minutes : t	0	1	2	5	12	15	20	35	60
Température en °C : θ	100	90	85	70	50	42	35	27	20

Afin de réaliser un ajustement affine, on pose : $z = \ln\theta$. On obtient alors :

Temps en minutes : t	0	1	2	5	12	15	20	35	60
$z = \ln\theta$	4,605	4,500	4,443	4,248	3,912	3,738	3,555	3,296	2,996

1. La calculatrice donne $a \approx -0{,}027\,00$ et $b \approx 3{,}371\,49$ d'où en arrondissant les coefficients à 10^{-4} l'équation :
   $z = -0{,}027\,0t + 3{,}371\,5$.
2. On considérera que la droite d'ajustement a pour équation $z = -0,027t + 4,37$.
   Avec $t = 10$, on obtient $z = -0,027\times 10 + 4,37 = 4,37 - 0,27 = 4,1 = \ln\theta$, d'où $\theta = \mathrm{e}^{4,1} \approx 60,34$ soit à l'unité près 60 (°C).
3. Au bout de 2 h soit 120 minutes le modèle donne une température θ, telle que $\ln\theta = 4,37 - 120\times 0,027 = 1,13$, d'où$\theta = \mathrm{e}^{1,13} \approx 3$ °C ce qui est idiot dans une pièce à 25 °C. Le modèle n'est alors pas pertinent.

PARTIE B

D'après la Loi de Newton, l'équation différentielle (E) : $y'(t) + 0,1y(t) = 2$ permet de modéliser la température du café (en °C) en fonction du temps t (en minutes).

1. • Soit $C \in \mathbb{R}$ une solution de (E); avec $C' = 0$, on a $0 + 0,1C = 2$, soit $C = 20$;
   • On sait que les solutions de l'équation différentielle $y'(t) + 0,1y(t) = 0$ sont de la forme $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-0,1t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
   Donc les solutions de (E) sont les fonctions :
   $t \longmapsto 20 + C\mathrm{e}^{-0,1t}$ avec $C \in \mathbb{R}$ quelconque.
2. Avec $f(t) = 20 + C\mathrm{e}^{-0,1t}$, on a $f'(t) = -0,1C\mathrm{e}^{-0,1t}$ et la fonction f solution de (E) et $f(0) = 100$ si
   $f'(0) + 0,1f'0) = 2$ ou $-0,1C + 0,1\times 100 = 2$ ou $8 = 0,1C$ soit $C = 80$.
   Conclusion : La solution particulière telle $f(0) = 100$ est définie par $f(t)20 + 80\mathrm{e}^{-0,1t}$.
3. On a $f(10) = 20 + 80\mathrm{e}^{1} \approx 20 + 29,43 \approx 49,43$ soit environ 49 °C.

4. $20+80\mathrm{e}^{-0,1t} < 35$ ou en ajoutant -20, $80\mathrm{e}^{-0,1t} < 15$ ou $\mathrm{e}^{-0,1t} < \dfrac{15}{80}$ puis par croissance de la fonction logarithme népérien $-0,1t < \ln\frac{15}{80}$ et en multipliant par -10 : $t > -\ln\frac{15}{80}$.
Or $-10\ln\frac{15}{80} \approx 16,7$.
Donc $S \approx [16,7\,;\,+\infty]$.
Cela signifie qu'à partir de 16 minutes et 42 secondes la température sera inférieure à 35 °C.

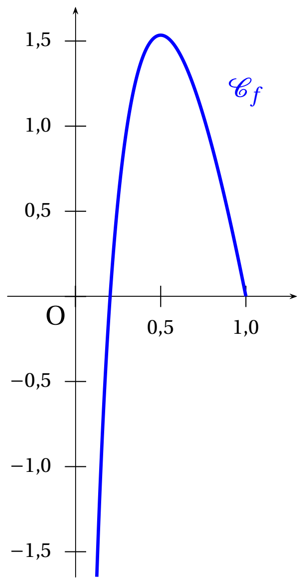
5. On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,1t} = 0$. Déterminer la limite de f.

Exercice 4 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 5\ln(x) - 10x + 10.$$

1. On a représenté ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère.



a. On peut conjecturer que la fonction est croissante sur $]0\,;0,5[$ et décroissante sur $]0,5\,;1[$.

b. Le maximum de f sur $[0\,;\,1]$ semble être $f(0,5) = 1,5$.

c. Il semble que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

2. Démontrer que pour tout x appartenant à $]0\,;\,1]$, la dérivée de f est définie par :
f est une somme de fonctions dérivables sur $]0;\,1]$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = 5\times\dfrac{1}{x} - 10 = \dfrac{5}{x} - 10 = \dfrac{5}{x} - \dfrac{x}{x}10 = \dfrac{5(1-2x)}{x}$.

3. • $f'(x) > 0 \iff \dfrac{5(1-2x)}{x} > 0 \iff 5(1-2x) > 0$ (puisque $x > 0$) $\iff 1-2x > 0 \iff 1 > 2x \iff x < \dfrac{1}{2}$;

• On a de même $f'(x) < 0 \iff \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1$;

• $f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$.

On a donc démontré que la fonction est croissante sur $]0\,;0,5[$, décroissante sur $]0,5\,;1[$ et que le maximum est $f(0,5) = 5\ln\frac{1}{2} - 10\times 0,5 + 10 = -5\ln 2 - 5 + 10 = 5 - 5\ln 2 \approx 1,534$.

• On a $\lim\limits_{x\to 0} 5x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc par produit et somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

4 . On considère l'algorithme suivant :

$x \longleftarrow 0,4$
$M \leftarrow f(0,4)$

Pour i allant de 1 à 12
  $x \longleftarrow x + 0,05$
  $y \longleftarrow f(x)$
  Si $y > M$
    Alors $M \longleftarrow y$
  Fin Si
Fin Pour

a. Recopier et compléter le tableau suivant avec les premières valeurs prises par x, y et M lors du déroulement de l'algorithme. On arrondira à 10^{-3}.

i		1	2	3	4
x	0,4	0,45	0,50	0,55	0,60
y		1,507	1,534	1,511	1,446
M	1,419	1,507	1,534	1,534	1,534

b. À la fin de l'exécution on a $M = 1,534$ qui est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 1]$.