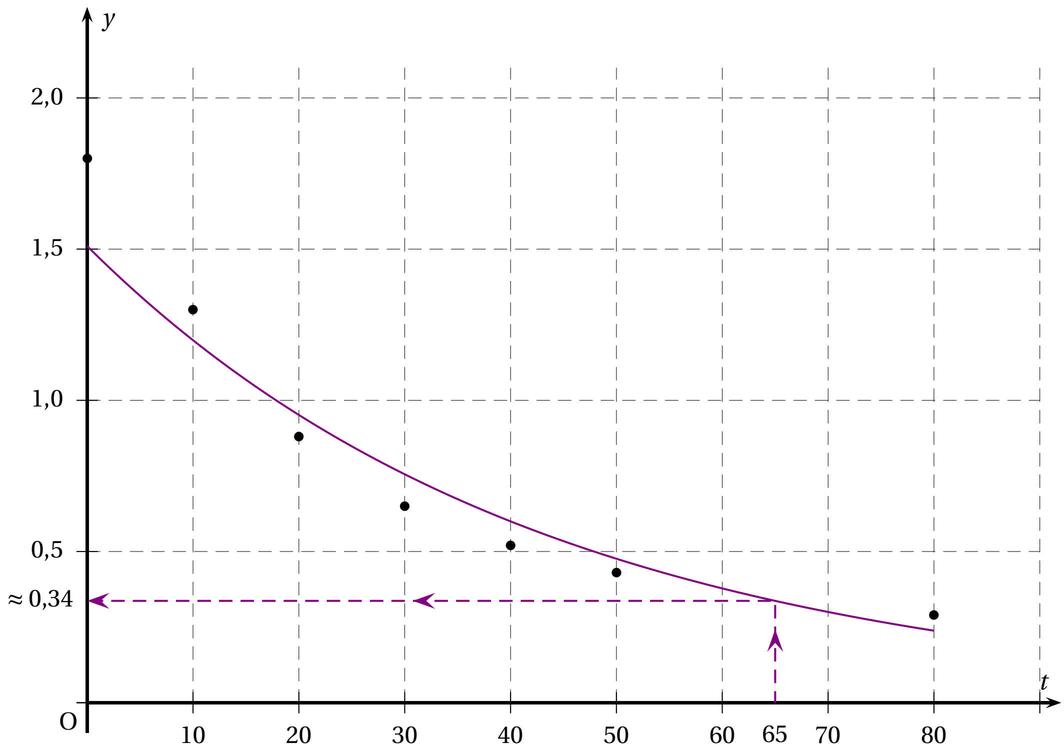
∽ Corrigé du baccalauréat STL biotechnologies ∽
Antilles-Guyane 16 juin 2016

EXERCICE 1 — 3 points

Le tableau ci-dessous donne la solubilité du dioxyde de carbone dans l'eau (en cm^3/ml d'eau) à la pression de 1 bar, pour différentes valeurs de la température (en °C).

Température t_i	0	10	20	30	40	50	80
Solubilité y_i	1,8	1,3	0,88	0,65	0,52	0,43	0,29

Le nuage de points représentant cette série est donné par le graphique suivant :



1. La forme de ce nuage conduit à envisager un ajustement exponentiel de la série $(t_i\ ;\ y_i)$.

On pose $z_i = \ln(y_i)$.

Complétons le tableau ci-dessous.

Température t_i	0	10	20	30	40	50	80
$z_i = \ln(y_i)$	0,588	0,262	−0,128	−0431	−0,654	−0,844	−1,238

2. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de z en t de la série $(t_i\ ;\ z_i)$ par la méthode des moindres carrés est $z = -0{,}023t + 0{,}407$. Les coefficients sont arrondis à 10^{-3}.

3. Dans la suite, on retient pour droite d'ajustement la droite d'équation $z = -0{,}023t + 0{,}41$. La relation entre la solubilité y du dioxyde de carbone et la température t peut se modéliser sous la forme $y = A\mathrm{e}^{-0{,}023t}$ où $A = 1{,}51$ à 10^{-2} près.

En effet $z_i = \ln(y_i)$ est équivalent à $y_i = \mathrm{e}^{z_i}$. En remplaçant z_i par la relation trouvée nous avons $y_i = \mathrm{e}^{-0{,}023t+0{,}41}$

$\mathrm{e}^{-0{,}023t+0{,}41} = \mathrm{e}^{-0{,}023t} \times \mathrm{e}^{0{,}41}$. Or $\mathrm{e}^{0{,}41} \approx 1{,}5068$ soit à 10^{-2}près 1,51. Par conséquent $y = 1{,}51\mathrm{e}^{-0{,}023t}$.

4. En supposant que l'ajustement précédent est valable pour toute valeur de t comprise dans l'intervalle $[0\,;80]$, déterminons une valeur approchée à 10^{-2} près de la solubilité du dioxyde de carbone dans l'eau à la température de 65 °C. Pour ce faire, remplaçons t par 65 dans la relation précédente :

$y = 1{,}51\text{e}^{-0{,}023\times 65} \approx 0{,}34$

Une valeur approchée à 10^{-2} près de la solubilité du dioxyde de carbone dans l'eau à la température de 65 °C est 0,34.

EXERCICE 2 (4 points)

Initialement, une population de bactéries compte 50 000 individus. L'évolution du nombre de bactéries, en fonction du temps, est étudiée dans un laboratoire où travaillent deux techniciens.

PARTIE A :

L'un des deux techniciens émet l'hypothèse que cette population augmente de 23 % toutes les heures. On modélise l'évolution du nombre de bactéries par (u_n) une suite de nombres réels.

1. Initialement, une population de bactéries compte 50 000 individus par conséquent

$u_0 = 50000$. À un taux d'augmentation de 0,23, correspond un coefficient multiplicateur de 1,23, il en résulte

$u_1 = 1{,}23 \times 50000 = 61500$ et $u_2 = 61500 \times 1{,}23 = 75645$.

2. **a.** $u_{n+1} = 1{,}23u_n$.

b. Chaque terme se déduisant du précédent en le multipliant par un même nombre,1,23, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,23.

3. **a.** Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$, soit ici $u_n = 50000\,(1{,}23)^n$.

b. $u_7 = 50000\,(1{,}23)^7 \approx 212964$ à l'entier près. Ce nombre représente le nombre de bactéries présentes au bout de sept heures.

4. Déterminons au bout de combien d'heures, selon l'hypothèse émise par ce technicien, le nombre de bactéries dépassera 500 000.

Résolvons $u_n \geqslant 500000$.

$50000\,(1{,}23)^n \geqslant 500000 \quad ; \quad (1{,}23)^n \geqslant 10 \quad ; \quad \ln 1{,}23^n \geqslant \ln 10 \quad ; \quad n\ln 1{,}23 \geqslant \ln 10 \quad ;$

$n \geqslant \dfrac{\ln 10}{\ln 1{,}23} \quad ; \quad n \geqslant 11{,}12.$

Au bout de douze heures, selon l'hypothèse émise par ce technicien, le nombre de bactéries dépassera 500 000.

PARTIE B :

Le deuxième technicien du laboratoire émet une hypothèse un peu différente et considère que le nombre de bactéries augmente de p% toutes les heures ($p \neq 23$). Pour déterminer au bout de combien d'heures, selon son hypothèse, le nombre de bactéries dépasse 500 000, il a réalisé l'algorithme suivant. Cependant, une partie de l'algorithme a été effacée, et on ne dispose que des premiers résultats affichés par celui-ci.

Algorithme	Résultats de l'algorithme
Variables : N est un nombre entier	
p et U sont des nombres réels	
Début :	$N = 0 \quad U = 50\,000$
Lire p	
N prend la valeur 0	$N = 1 \quad U = 63\,500$
U prend la valeur 50 000	
Tant que $U <$500 000	
N prend la valeur $N + 1$	$N = 2 \quad U = 80\,645$
U prend la valeur $1{,}27 * U$	$N = 3 \quad U = 102\,673{,}15$
Afficher la valeur de N	.
Afficher la valeur de U	.
Fin du tant que	.
Afficher N	.
Afficher U	.
Fin	.

1. En utilisant les premiers résultats affichés par l'algorithme, déterminons la valeur de p.

Calculons les quotients de deux valeurs successives.

$\dfrac{63\,500}{50\,000} = 1{,}27 \qquad \dfrac{80\,645}{63\,500} = 1{,}27 \qquad \dfrac{102\,673{,}15}{80\,645} \approx 1{,}27$

La valeur de p est 1,27.

2. Les parties manquantes de l'algorithme figurant dans la colonne de gauche du tableau ont été complétées.

3. Déterminons au bout de combien d'heures, selon cette hypothèse, le nombre de bactéries dépassera 500 000.

Pour ce faire, nous pouvons considérer une suite géométrique (v_n) de raison 1,27 et résoudre $v_n \geqslant 500\,000$.

$50\,000\,(1{,}27)^n \geqslant 500\,000 \quad ; \quad (1{,}27)^n \geqslant 10 \quad ; \quad \ln 1{,}27^n \geqslant \ln 10 \quad ; \quad n \ln 1{,}27 \geqslant \ln 10 \quad ;$

$n \geqslant \dfrac{\ln 10}{\ln 1{,}27} \quad ; \quad n \geqslant 9{,}63$

ou utiliser l'algorithme, les valeurs étant arrondies à l'unité.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U	50 000	63 500	80 645	102 419	130 072	165 192	209 793	266 438	338 376	429 738	545 767
condition	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	fausse

Au bout de dix heures, selon cette hypothèse, le nombre de bactéries dépassera 500 000.

EXERCICE 3 (5 points)

PARTIE A : RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Les fonctions intervenant dans cette partie sont définies et dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.
On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0{,}6y = 45.$$

1. Déterminons une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).

Soit la fonction g définie par $g(x) = k$ où k est un nombre réel, solution de (E). Nous avons donc $0+0,6k = 45$ d'où $k = \dfrac{45}{0,6} = 75$

La fonction constante solution de (E) est $x \mapsto 75$.

2. Résolvons l'équation différentielle (E).

Déterminons d'abord une solution de l'équation (E$'$) $y'+0,6y = 0$. Nous en déduisons $\dfrac{y'}{y} = -0,6$. Par conséquent, les solutions de cette équation sont les fonctions définies par $y(x) = C\mathrm{e}^{0,6x}$ où C est une constante quelconque.

Les solutions de (E) s'écrivent comme la somme des solutions de (E$'$) et de la solution particulière g.

Les solutions de (E) sont les fonctions y définies par $y(x) = C\mathrm{e}^{0,6x}+75$ où C est une constante quelconque.

3. Déterminons la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 20$.

$y(0) = C\mathrm{e}^{0}+75 = 20$ d'où $C = -55$.

La fonction f, solution de (E) et vérifiant $f(0) = 20$, est la fonction définie par

$f(x) = -55\mathrm{e}^{-0,6x}+75$.

PARTIE B : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Dans cette partie, on considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(t) = -55\mathrm{e}^{-0,6t}+75.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculons la limite de f en $+\infty$.

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} -55\mathrm{e}^{0,6t} + \lim_{t\to+\infty} 75 = 0+75 = 75$

La droite d'équation $y = 75$ est asymptote à la courbe représentative $(\mathscr{C})$.

2. **a.** $f'(t) = -55\left(-0.6\mathrm{e}^{-0,6t}\right) = 33\mathrm{e}^{-0,6t}$.

b. Étudions le signe de f'.

Pour tout t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, $f'(t) > 0$ comme produit de termes strictement positifs.

Étudions le sens de variation.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Il en résulte que f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Dressons le tableau de variation de la fonction f

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
Variation de f	20	$\nearrow$	75

c. La courbe $(\mathscr{C})$ est tracée à la fin du texte.

3. Résolvons par le calcul l'équation $f(t) = 70$

$-55\text{e}^{-0,6t} + 75 = 70 \qquad 55\text{e}^{-0,6t} = 5 \qquad \text{e}^{-0,6t} = \dfrac{1}{11} \qquad \ln \text{e}^{-0,6t} = \ln \dfrac{1}{11} \; -0,6t = -\ln 11$

$t = \dfrac{\ln 11}{0,6} \approx 3,9965$

L'ensemble solution de l'équation $f(t) = 70$ est $\left\{\dfrac{\ln 11}{0,6}\right\}$, à une unité près $\{4\}$.

4. Calculons $I = \displaystyle\int_0^4 f(t)\,\text{d}t$

Déterminons une primitive F de f.

$F(t) = 75t - 55 \times \left(\dfrac{1}{-0,6}\text{e}^{-0,6t}\right) = 75x + \dfrac{275}{3}\text{e}^{-0,6t}$

$I = \displaystyle\int_0^4 f(t)\,\text{d}t = \left[75x + \dfrac{275}{3}\text{e}^{-0,6t}\right]_0^4$

$F(4) = 75 \times 4 + \dfrac{275}{3}\text{e}^{-0,6\times 4} = 300 + \dfrac{275}{3}\text{e}^{-2,4}$

$F(0) = 75 \times 0 + \dfrac{275}{3}\text{e}^{-0,6\times 0} = \dfrac{275}{3}\text{e}^{0} = \dfrac{275}{3}$

$I = F(4) - F(0) = 300 + \dfrac{275}{3}\text{e}^{-2,4} - \dfrac{275}{3} = \dfrac{900 + 275\text{e}^{-2,4} - 275}{3} = \dfrac{625 + 275\text{e}^{-2,4}}{3} \approx 216,65.$

La fonction f étant une fonction strictement positive sur $[0\,;\,+\infty[$ *a fortiori* sur $[0;\,4]$, ce résultat peut être considéré comme l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $t = 4$.

PARTIE C : UTILISATION DES RÉSULTATS

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Le principe de la haute pasteurisation consiste à chauffer dans un autoclave, pendant un laps de temps de 15 secondes, les aliments à une température comprise entre 70 °C et 75 °C.

Du lait dont la température initiale est de 20 °C est introduit dans un autoclave dont la température est constante et égale à 75 °C. La température du lait est donnée par la fonction f définie dans la partie B, où t est le temps en secondes.

Déterminons combien de temps, au total, le lait doit rester dans l'autoclave afin d'être pasteurisé.
Nous avons montré à la question Partie B 3 que la température de 70°C était atteinte au bout de quatre heures. Puisque le lait doit rester quinze secondes à la température minimale de 70°C, le lait pour être pasteurisé doit rester quatre heures et quinze secondes dans l'autoclave.

EXERCICE 4 (5 points)

On étudie le taux de glycémie dans une population donnée, exprimé en g/L.

PARTIE A

On suppose que le taux de glycémie est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,03$. On mesure la glycémie chez une personne choisie au hasard dans la population.

1. Justifions que la probabilité pour que la glycémie de cette personne soit comprise entre 0,94 et 1,06 a pour valeur approchée 0,95.

$P(0,94 \leqslant X \leqslant 1,06) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$. Or nous savons que pour une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres $(\mu,\, \sigma)$ la probabilité $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$ est d'environ 0,95.

2. Déterminons une valeur approchée de $P(X \leqslant 1,06)$.

   Puisque la courbe est symétrique par rapport à la moyenne, nous avons donc

   $P(X \leqslant 0,94) = P(X \geqslant 1,06) = \dfrac{0,05}{2} = 0,025$

   $P(X \leqslant 1,06) = 1 - P(X \geqslant 1,06) = 1 - 0,025 = 0,975$

3. Sachant que $P(X \geqslant 0,97)$ a pour valeur approchée 0,84, déterminons une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(0,97 \leqslant X \leqslant 1,06)$.

   $P(0,97 \leqslant X \leqslant 1,06) = p(X \leqslant 1,06) - p(X \leqslant 0,97) = 0,975 - (1 - 0,84) = 0,815$

   ou

   $P(0,97 \leqslant X \leqslant 1,06) = p(X \geqslant 0,97) - p(X \geqslant 1,06) = 0,84 - 0,025 = 0,815$

PARTIE B

Un médecin, qui ne connaît pas l'hypothèse émise dans la PARTIE A, souhaite estimer la proportion p inconnue des personnes de cette population dont le taux de glycémie est supérieur à 1,06.
Il prélève au hasard un échantillon de 1 000 personnes dans la population étudiée.
Il constate que 29 personnes ont un taux de glycémie supérieur à 1,06.

1. Déterminons l'intervalle de confiance au niveau de 95 % de la proportion p.

   La proportion observée est égale à $f = \dfrac{29}{1\,000} = 0,029$.

   L'intervalle d'estimation d'une proportion avec un niveau de confiance de 95 % est

$$I = \left[f = -1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ,\ f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

$$I = \left[0,029 - 1,96\sqrt{\frac{0,029(1-0,029)}{1000}}\ ;\ 0,029 + 1,96\sqrt{\frac{0,029(1-0,029)}{1000}}\right] \approx [0,018\ ;\ 0,040]$$

   Les bornes de l'intervalle sont arrondies à 10^{-3}.

2. À la question précédente, on a déterminé un intervalle de confiance I au niveau de 95 % de la proportion p de personnes ayant une glycémie supérieure à 1,06; cela signifie que la probabilité que cet intervalle contienne la proportion en question est supérieure à 95 %.

   À la question **A.2**, on a vu que $P(X \geqslant 1,06) \approx 0,025$.

   Or 0,025 appartient à l'intervalle I.

   Donc on peut dire que le résultat de la question précédente est cohérent avec le résultat de la question **A.2**, avec un risque d'erreur de 5 %.

PARTIE C

On admet que, dans la population étudiée, la probabilité qu'une personne ait un taux de glycémie supérieur à 0,99 g/L est $p_1 = 0,64$.
On tire un échantillon de 100 personnes au hasard. On suppose que la population est suffisamment importante pour assimiler le choix de cet échantillon à un tirage avec remise de 100 personnes. On appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes dont la glycémie est supérieure à 0,99 g/L.

1. Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,64$ puisqu'il y a répétition de cent tirages indépendants et identiques caractérisés par deux issues ou la personne a un taux supérieur à 0,99 g/L de probabilité 0,64 (succès) ou la personne a un taux inférieur à 0,99 g/L de probabilité 0,36 (échec).

On suppose que les conditions permettant d'approximer une loi binomiale par une loi normale sont remplies. On appelle μ' la moyenne et σ' l'écart type de la loi normale Z approximant la loi binomiale Y.

2. $\mu' = np = 100 \times 0{,}64 = 64$ et $\sigma' = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{64 \times 0{,}36} = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$.

3. Déterminons une valeur approchée de $P(Z \leqslant 78{,}4)$ à 10^{-2} près.

$p(\mu - 3\sigma \leqslant Z \leqslant \mu + 3\sigma)$ est environ 0,99

$p(Z \leqslant 78{,}4) = 1 - p(Z \geqslant \mu' + 3\sigma') = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$.

Une valeur approchée de $P(Z \leqslant 78{,}4)$ à 10^{-2} près est 1.

EXERCICE 5 (3 points)

QUESTIONNAIRE À CHOIX MULTIPLE

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte. Chaque bonne réponse rapporte un point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.
Reporter sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+3\right)$, et soit (C) sa représentation graphique dans un repère du plan. La tangente à la courbe (C) au point A(1 ; ln(4)) a pour coefficient directeur :

a. ~~0,25~~ **b.** $\boxed{0{,}5}$ **c.** ~~1~~ **d.** ~~ln 4~~

2. On considère deux variables aléatoires Y et Z.

Y suit une loi uniforme sur l'intervalle [1 ; 3].

Z suit une loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 2].

a. $\boxed{Y \text{ et } Z \text{ ont la même variance.}}$

b. ~~Y et Z ont la même espérance.~~

c. ~~La variance de Z est strictement inférieure à la variance de Y.~~

d. ~~La variance de Z est nulle.~~

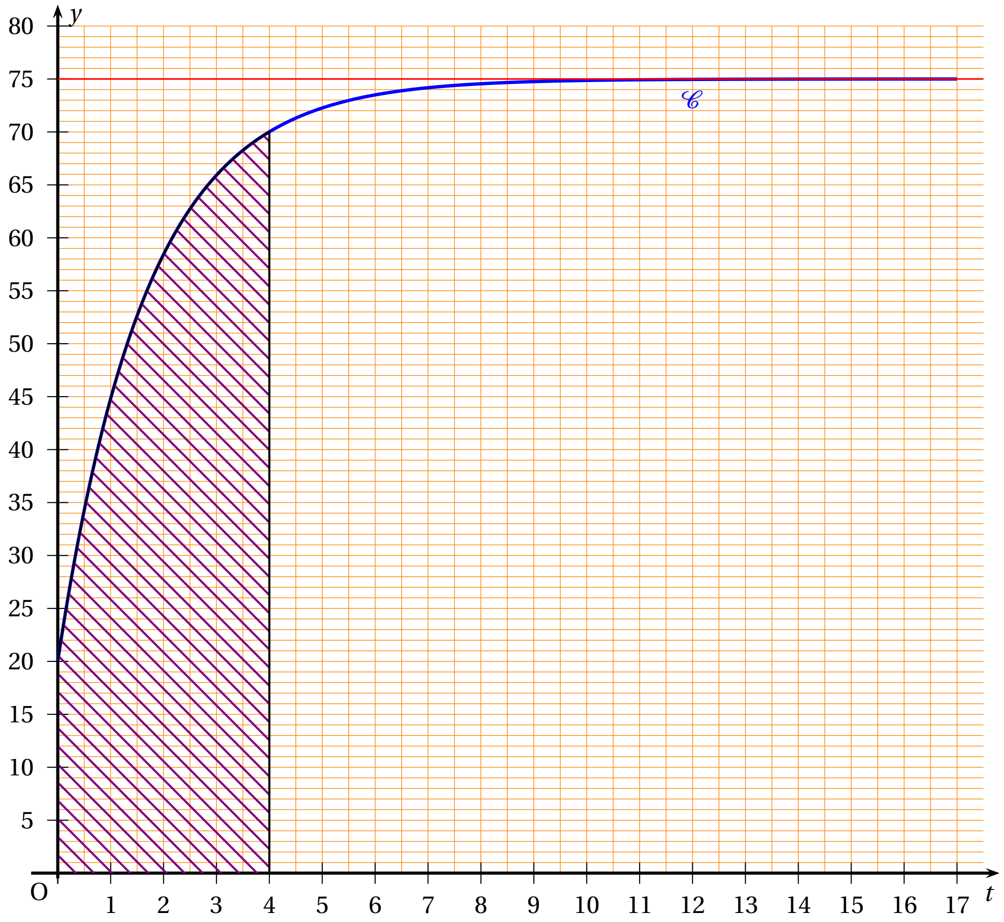
3. Une culture bactériologique comporte initialement 8 000 bactéries.

Leur nombre augmente de 20 % par heure.

Dans la copie de la feuille de tableur ci-dessous, quelle formule peut-on rentrer en B3, puis recopier vers le bas, pour calculer le nombre de bactéries en fonction de l'heure ?

	A	B
1	Temps (heures)	Nombre de bactéries
2	0	8 000
3	1	
4	2	

a. ~~= B2 + 0,20~~ **b.** ~~= 0,8 * B2~~ **c.** $\boxed{= 1{,}2 * \text{B2}}$ **d.** ~~= 1,2 * B2~~ .


y
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
O
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
t
$\mathscr{C}$