Corrigé du baccalauréat STL biotechnologies
Antilles-Guyane 16 juin 2017

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** La calculatrice donne $P(25 \leqslant X \leqslant 30) \approx 0,325$.

   b. La calculatrice donne $P(X \leqslant 18,5) \approx 0,114$.

2. **a.** On sait que l'intervalle est :
   $I = \left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$. Avec $p = 0,15$ et $n = 800$, on obtient :
   $I \approx [0,137\ ;\ 0,163]$.

   b. Pour cet échantillon de 800 personnes, on a trouvé 148 personnes obèses, soit une fréquence de $\dfrac{148}{800} = 0,185$.
   Or $0,185 \notin [0,137\ ;\ 0,163]$: il y a donc lieu d'envisager des actions de prévention contre l'obésité.

EXERCICE 2 **4 points**

QUESTIONNAIRE À CHOIX MULTIPLE

1. Diminuer chaque heure de 5,5 %, c'est multiplier par $1 - 0,055 = 0,945$.

   Donc la dose est multipliée au bout de n heures par $0,945^n$.

   D'où $0,945^n < 0,2 \iff n\ln 0,945 < \ln 0,2 \iff n > \dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,945}$.

   Or $\dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,945} \approx 28,45$.

   La quantité de médicament restant dans le sang sera passée sous le seuil des 20 % au bout de 29 heures.

2. L'intervalle de confiance dont les bornes sont arrondies à 10^{-2}, au niveau 95 %, pour la proportion p est : $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

   Avec $f = \dfrac{57}{136}$ et $n = 136$, on obtient l'intervalle [0,333 ; 0,505], soit au centième près [0,34 ; 0,50].

3. On a $P(0,4 \leqslant Y \leqslant 0,8) = \mathrm{e}^{3,5\times 0,8} - \mathrm{e}^{3,5\times 0,4} \approx 0,186$.

4. $= 2 \times \text{ALEA}() - 1$

EXERCICE 3 **4 points**

1. Diminuer chaque minute la concentration de 3 %, revient à la multiplier par $1-0,03 = 0,97$.

   On a donc n désignant le nombre de minutes écoulées : $C_{n+1} = C_0 \times 0,97$. Cette relation montre que la suite (C_n) est géométrique de raison 0,97 et de premier terme $C_0 = 1$.

2. On sait que quel que soit le naturel n, $C_n = C_0 \times q^n$, soit $C_n = 0,97^n$.

3. Il faut trouver n tel que :

   $0,97^n = 0,5 \iff n\ln 0,97 = \ln 0,5 \iff n = \dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,97} \approx 22,75$; la concentration aura été diminuée de moitié à la 23[e] minute.

4. **a.** L'algorithme calcule successivement :
$0,97$; $0,97^2$; $0,97^3$; $0,97^4$; $0,97^5 \approx 0,859$.

b. Le résultat précédent montre qu'à la 5e minute la concentration du médicament est de 85,9 %.

5. **a.** Pour $K = 5$ la question précédente a montré que la concentration était de $85,9 > 50$ %. Donc $K > 5$.

b. L'algorithme permet de retrouver la réponse de la question **3.**, soit $i = 23$.

EXERCICE 4 **8 points**

PARTIE A - ÉTUDE STATISTIQUE

1.

t_i	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln\left(\dfrac{y_i}{t_i}\right)$	2,60	1,99	1,53	1,16	0,85	0,56

2. La calculatrice donne $z = -0,399714t + 2,847$ soit en arrondissant les coefficients au centième :

$z = -0,40t + 2,85$.

3. Comme $z = \ln\left(\dfrac{y}{t}\right)$, l'équation précédente s'écrit :

$\ln\left(\dfrac{y}{t}\right) = -0,40t+2,85 \iff \dfrac{y}{t} = \mathrm{e}^{-0,40t+2,85} \iff \dfrac{y}{t} = \mathrm{e}^{2,85} \times \mathrm{e}^{-0,40t} \iff y = t \times \mathrm{e}^{2,85} \times \mathrm{e}^{-0,40t}$.

Or $\mathrm{e}^{2,85} \approx 17,288$, donc finalement en arrondissant les coefficients au dixième :

$$y = 17,3t\mathrm{e}^{-0,4t}.$$

4. On a $y(8) = 17,3 \times 8\mathrm{e}^{-0,4\times 8} \approx 5,6$ au dixième près.

PARTIE B - ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = 17,3t\mathrm{e}^{-0,4t}.$$

1. Géométriquement ceci signifie que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

2. En dérivant $f(t)$ comme un produit on a pour tout réel positif :

$f'(t) = 17,3\mathrm{e}^{-0,4t} - 0,4 \times 17,3t\mathrm{e}^{-0,4t} = 17,3\mathrm{e}^{-0,4t}(1 - 0,4t) = (17,3 - 6,92t)\mathrm{e}^{-0,4t}$.

3. **a.** On sait que eû > 0, quel que soit le réel u; le signe de $f"(t)$ est donc celui de la différence $17,3 - 6,92t$.

- $17,3 - 6,92t > 0 \iff 17,3 > 6,92t \iff \dfrac{17,3}{6,92} > t \iff t < 2,5$.

$f'(t) > 0$ sur $[0~;~2,5]$: sur cet intervalle la fonction f est croissante.

- $17,3 - 6,92t < 0 \iff 17,3 < 6,92t \iff \dfrac{17,3}{6,92} < t \iff t > 2,5$.

$f'(t) < 0$ sur $[2,5~;~+\infty[$.

- $17,3 - 6,92t = 0 \iff 17,3 = 6,92t \iff \dfrac{17,3}{6,92} = t \iff t = 2,5$.

$f'(2,5) = 0$.

b. La fonction est donc croissante sur $[0;2{,}5]$ de $f(0)=0$ à $f(2{,}5)=17{,}3\times 2{,}5\mathrm{e}^{-0{,}4\times2{,}5}=43{,}25\mathrm{e}^{-1}\approx 15{,}91$.
La fonction est décroissante sur $[2{,}5\,;\,+\infty[$ de $f(2{,}5)\approx 15{,}91$ à 0.
$f(2{,}5)\approx 15{,}91$ est le maximum de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

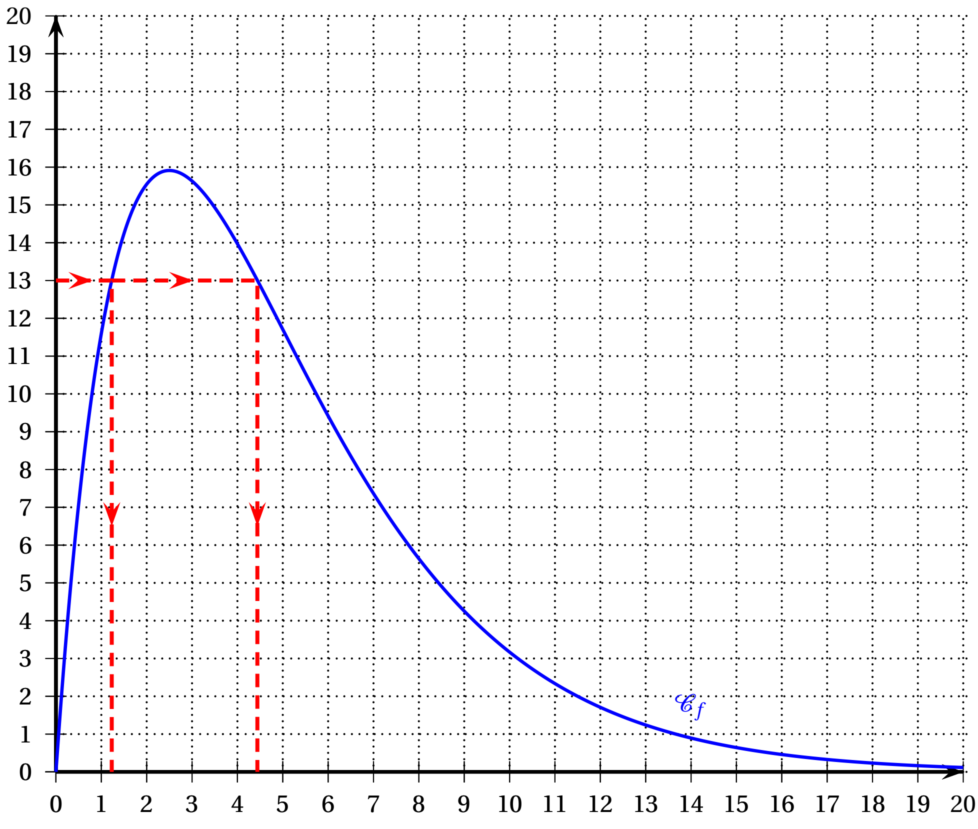
c.

$$F(t)=(-108{,}125-43{,}25t)\mathrm{e}^{-0{,}4t}.$$

Sur $[0\,;\,+\infty[$, F est dérivable et sur intervalle :
$F'(t)=-43{,}25\mathrm{e}^{-0{,}4t}-0{,}4(-108{,}125-43{,}25t)\mathrm{e}^{-0{,}4t}=\mathrm{e}^{-0{,}4t}(-43{,}25+0{,}4\times108{,}125+0{,}4\times43{,}25t)=\mathrm{e}^{-0{,}4t}(-43{,}25+43{,}25+17{,}3t)=17{,}3t\mathrm{e}^{-0{,}4t}=f(t)$.
Cette égalité montre que F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. On a $V_{[1\,;\,5]}=\dfrac{1}{5-1}\displaystyle\int_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{4}[F(t)]_1^5=\dfrac{1}{4}(F(5)-F(1))=$
$0{,}25\left((-108{,}125-43{,}25\times5)\mathrm{e}^{-0{,}4\times5}-(-108{,}125-43{,}25\times1)\mathrm{e}^{-0{,}4\times1}\right)=$
$0{,}25\left((-108{,}125-216{,}25)\mathrm{e}^{-2}\right)-(-108{,}125-43{,}25)\mathrm{e}^{-0{,}4}\big)=0{,}25\times(-324{,}375)\mathrm{e}^{-2}+0{,}25\times151{,}375\mathrm{e}^{-0{,}4}$
$\approx 14{,}39$, soit 14,4 au dixième près.

PARTIE C - INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS DE LA PARTIE B



1. On a vu dans la partie B que le maximum est à peu près 15,91 et que ce maximum est obtenu pour $t=2{,}5$ (semaines).

2. L'analyse de sang donne ce test positif sur l'intervalle $[1{,}2;\,4{,}5]$ environ.

3. De la même façon on voit que le taux est inférieur à 12 sur l'intervalle $[0;\,1]$ et sur l'intervalle $[5\,;\,+\infty]$.