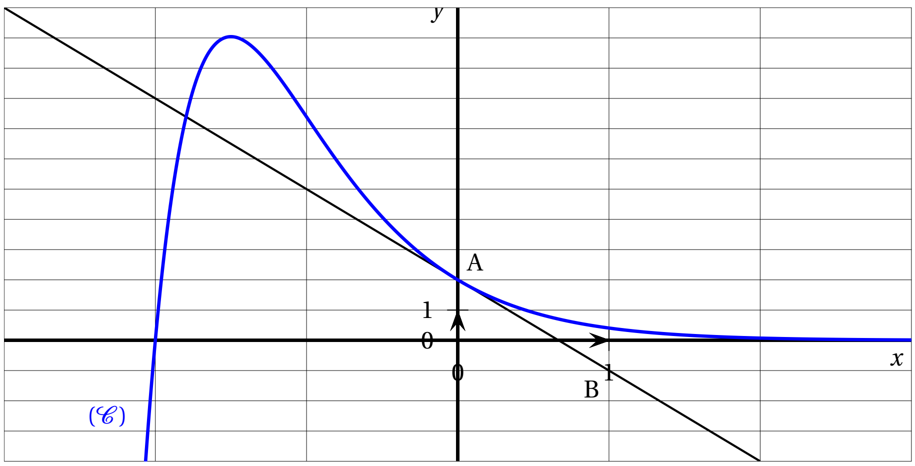
Corrigé du baccalauréat STL Biotechnologies

Nouvelle-Calédonie – 27 novembre 2020

Exercice 1 — 4 points

Dans les deux premières questions. on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-2x}$
On note f' sa fonction dérivée.
La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal d'origine O est donnée ci-dessous.
Soit les points A$(0\,;2)$ et B$(1\,;\,-1)$. La droite (AB) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.



Question 1 :

$f'(0) =$

a. 2 — $\boxed{\textbf{b.}\ -3}$ — **c.** -1 — **d.** $-\dfrac{3}{2}$

Question 2 :

L'ensemble des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ est :

a. $S = \{2\}$ — **b.** $S = \{3\}$ — **c.** $S = \{-2\}$ — $\boxed{\textbf{d.}\ S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}}$

Dans les deux questions suivantes on s'intéresse à la greffe de cornée en France. Les données utilisées portent sur l'année 2015 et sont extraites du bilan d'activité 2016 de l'agence de biomédecine sur le prélèvement, la greffe et l'inscription en attente de greffe.
47,6 % des inscrits en 2015 en Île-de-France ont reçu une greffe de cornée la même année. On choisit au hasard 100 inscrits en 2015. Ce choix est assimilable à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes greffées dans ce groupe. X suit une loi binomiale de paramètres 100 et $0,476$.
Les résultats sont arrondis à $0,001$ *près*

Question 3 :

La probabilité d'avoir au moins 40 personnes greffées est :

a. 0,077 — **b.** 0,651 — $\boxed{\textbf{c.}\ 0{,}948}$ — **d.** 1,027

Question 4 :

Les conditions sont satisfaisantes pour approximer la loi de X par une loi normale d'une variable aléatoire Y.

$P(37 \leqslant Y \leqslant 58) \approx$

a. 0,038 **a.** 0,872 **a.** 0,853 $\boxed{\textbf{a. } 0{,}964}$

Exercice 2 5 points

Suite à un incident nucléaire, des traces de contamination ont été découvertes lors des contrôles réalisés de manière systématique à la sortie des zones nucléaires, notamment grâce au passage sous des portiques d'accès.

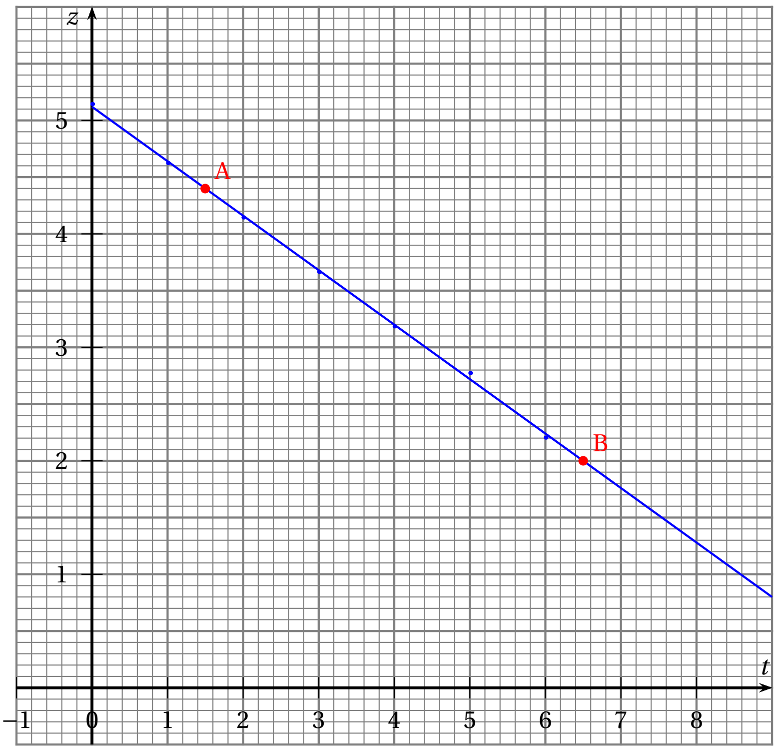
Le tableau ci-dessous donne les résultats fournis, heure par heure, par un appareil de mesure de la radioactivité. Les nombres entiers N_i représentent le nombre de particules recueillies par l'appareil en une seconde.

t_i en heures	0	1	2	3	4	5	6
N_i	170	102	63	39	24	16	9

1. On pose $z_i = \ln(N_i)$ pour i entier variant de 0 à 6.
On complète le tableau donnant les valeurs de z_i arrondies au centième

t_i en heures	0	1	2	3	4	5	6
N_i	170	102	63	39	24	16	9
$z_i = \ln(N_i)$	$5,14$	$4,62$	$4,14$	$3,66$	$3,18$	$2,77$	$2,20$

2. On représente le nuage de points de coordonnées $(t_i\ ;\ z_i)$ dans le repère orthogonal ci-dessous.



3. L'équation de la droite de régression linéaire de z en t donnée par la calculatrice, avec les coefficients arrondis à 10^{-3} près, est $z = -0,481\,t + 5,11$.

Dans la suite, on prendra pour équation de la droite de régression linéaire : $z = -0,48\,t + 5,12$.

4. On représente la droite de régression linéaire dans le repère précédent en utilisant deux points : si $x = 1,5$, alors $z = 4,4$, et si $x = 6,5$, alors $z = 2$; on prendra donc A $(1,5\ ;\ 4,4)$ et B $(6,5\ ;\ 2)$.

5. $z = -0,48t + 5,12$ et $z = \ln(N)$ donc $\ln(N) = -0,48t + 5,12$ donc $N = \mathrm{e}^{-0,48t+5,12}$.

6. L'appareil de mesure possède deux voyants (un rouge et un vert). Tant que le nombre de particules recueillies est strictement supérieur à 3, le voyant rouge est allumé. Lorsque le nombre de particules recueillies est inférieur ou égal à 3, le voyant rouge s'éteint et le voyant vert s'allume.

Le voyant vert s'allume si $N \leqslant 3$; on résout cette inéquation :

$N \leqslant 3 \iff \mathrm{e}^{-0,48t+5,12} \leqslant 3 \iff -0,48t + 5,12 \leqslant \ln(3) \iff 5,12 - \ln(3) \leqslant 0,48t \iff t \geqslant \dfrac{5,12 - \ln(3)}{0,48}$

Or $\dfrac{5,12 - \ln(3)}{0,48} \approx 10,37$ donc le voyant sera vert au bout de 11 heures.

Exercice 3 — 5 points

On introduit initialement 200 bactéries dans un milieu clos.
Dans cet exercice, on s'intéresse à l'évolution de la population de bactéries.

Partie A : un premier modèle

Au XVII$^{\text{e}}$ siècle, Thomas Malthus propose un modèle décrivant l'évolution d'une population isolée connaissant le taux de natalité et le taux de mortalité.
On note u_n la population de bactéries présentes dans ce milieu n heures après l'introduction des bactéries. Ainsi $u_0 = 200$.
Selon le modèle proposé par Malthus, la suite (u_n) vérifie, pour tout n : $u_{n+1} = u_n + au_n - bu_n$,
où a représente le taux de natalité et b représente le taux de mortalité de la population. Les réels a et b, étant des taux, sont compris entre 0 et 1.

On suppose que $a = 0,12$ et $b = 0,07$, c'est-à-dire : $u_{n+1} = u_n + 0,12u_n - 0,07u_n$.

1. a. Le nombre de bactéries 1 heure après le début de l'expérience est :
$u_1 = u_0 + 0,12u_0 - 0,07u_0 = 200 + 0,12 \times 200 - 0,07 \times 200 = 210$.

b. $u_{n+1} = u_n + 0,12u_n - 0,07u_n = (1 + 0,12 - 0,07)\ u_n = 1,05u_n$
Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,05$ et de premier terme $u_0 = 200$.

c. On en déduit que, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 200 \times 1,05^n$.

2. On complète le tableau de valeurs de cette suite, en arrondissant les résultats à l'entier près.

n	0	1	5	10	20	40	60	100
u_n	200	210	255	326	531	1 408	3 736	26 300

3. a. La raison de la suite géométrique est $1,05 > 1$, et $u_0 = 200 > 0$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
La population de bactéries tend vers $+\infty$.

b. Il paraît peu réaliste que la population des bactéries augmente indéfiniment.

4. Pour que selon ce modèle la population disparaisse, il faut que la suite géométrique ait une raison strictement inférieure à 1, c'est-à-dire $1 + a - b < 1$.
On peut prendre par exemple, $a = 0,07$ et $b = 0,12$.

Partie B : un deuxième modèle

En 1840, Pierre François Verhulst propose un modèle différent selon lequel les taux de natalité et de mortalité dépendent de la population.
On note v_n la population de bactéries dans ce milieu n heures après l'introduction de $v_0 = 200$ bactéries, et on admet que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = 1,12v_n - 0,0001\,v_n^2$.

1. On considère l'algorithme ci-contre :

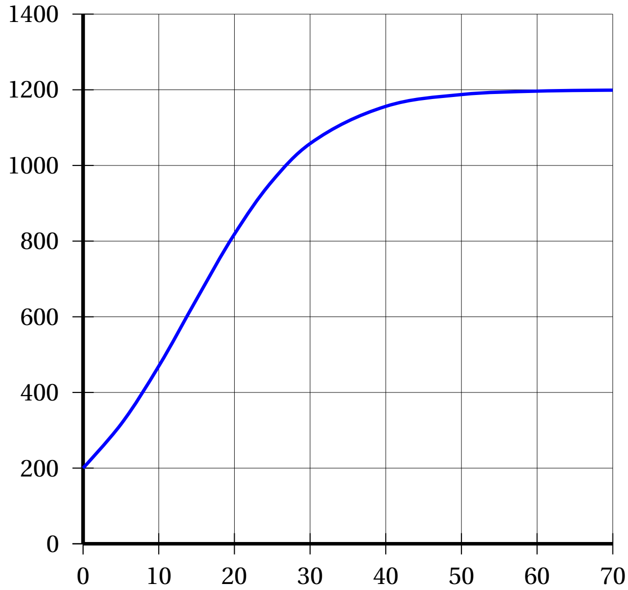
```
V ← 200
N ← 0
Tant que V < 1 100
   V ← 1,12 × V − 0,000 1 × V^2
   N ← N + 1
Fin Tant que
```

a. On complète le tableau ci-dessous en exécutant cet algorithme à la main, et en arrondissant les résultats à l'entier près.

V	200	220	242	265	289
N	0	1	2	3	4

b. À la fin de son exécution, la variable N contient la valeur 34.
Donc 34 est la première valeur de N pour laquelle la variable V n'est plus inférieure à 1 100.
Autrement dit, c'est au bout de 34 heures que la population de bactéries dépassera 1 100.

2. Le graphique ci-dessous donne la représentation des premiers termes de la suite (v_n).



D'après le graphique, on peut conjecturer que la population de bactéries va tendre vers 1 200.

Exercice 4 — 5 points

Partie A : résolution d'une équation différentielle

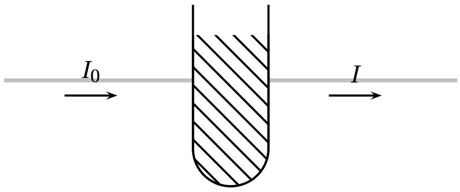
On considère l'équation différentielle (E) : $5y' + 7,9y = 0$.

1. D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle (E) $ay' + by = 0$ sont les fonctions f définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$ où k est un réel quelconque.
Donc les solutions de l'équation différentielle (E) $5y' + 7,9y = 0$ sont les fonctions f définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{7,9}{5}t}$ où k est un réel quelconque, soit $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-1,58t}$.

2. $f(0) = 0,001 \iff k\,\mathrm{e}^{0} = 0,001 \iff k = 0,001$
Donc la solution f de l'équation différentielle (E), définie sur $[0~;~+\infty[$, qui vérifie la condition $f(0) = 0,001$ est définie par $f(t) = 0,001\,\mathrm{e}^{-1,58t}$.

Partie B : loi de Lambert Beer

Un faisceau lumineux incident, d'intensité I_0, traverse une solution contenue dans un tube transparent. À la sortie du tube, l'intensité I du faisceau lumineux est mesurée par un détecteur.



La loi de Lambert Beer décrit l'intensité I du faisceau lumineux à la sortie en fonction de l'intensité du faisceau incident I_0, de la concentration c de la substance absorbante et de l'épaisseur d du milieu traversé par la lumière selon la relation :

$$I(c) = I_0\,\mathrm{e}^{-\epsilon dc} \quad \text{où } \epsilon \text{ est le coefficient d'extinction molaire du soluté.}$$

Initialement, la cuvette ne contient que du solvant ($c = 0$ mol.L^{-1}), on augmente la concentration de la substance en ajoutant du soluté de façon continue.
Dans cette expérience :

- l'épaisseur d du milieu traversé est de 1 cm
- le coefficient d'extinction molaire ϵ du soluté est de 1,58 L.mol^{-1}.cm^{-1}
- l'intensité du faisceau incident est $I_0 = 0,001$ W.sr^{-1} (Watt par stéradian)

1. On a $\epsilon = 1,58$, $d = 1$ et $I_0 = 0,001$ donc $I(c) = I_0\,\mathrm{e}^{-\epsilon dc}$ devient $I(c) = 0,001\,\mathrm{e}^{-1,58c}$.
Donc la fonction l, fonction de la variable c, est la solution particulière de l'équation différentielle (E) déterminée dans la question 2 de la partie A.

2. $I'(c) = 0,001 \times (-1,58)\,\mathrm{e}^{-1,58c} = -0,00158\,\mathrm{e}^{-1,58c} < 0$, donc la fonction I est strictement décroissante sur $[0~;~+\infty[$,
C'est tout à fait cohérent que l'intensité diminue quand la concentration de la substance absorbante augmente.

3. Pour récupérer 75 % de l'intensité du faisceau incident à la sortie de la cuvette, il faut que la concentration c vérifie $\dfrac{I(c)}{I_0} = 75\,\%$, c'est-à-dire $\dfrac{0,001\,\mathrm{e}^{-1,58c}}{0,001} = 0,75$ ou encore $\mathrm{e}^{-1,58c} = 0,75$.
$\mathrm{e}^{-1,58c} = 0,75 \iff -1,58c = \ln(0,75) \iff c = \dfrac{\ln(0,75)}{-1,58}$ soit environ $0,18$

4. L'absorbance de la substance est définie par $A(c) = \ln\left(\dfrac{I_0}{I(c)}\right)$.
$A(c) = \ln\left(\dfrac{I_0}{I(c)}\right) = \ln\left(\dfrac{0,001}{0,001\,\mathrm{e}^{-1,58c}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{1,58c}\right) = 1,58c.$

Partie C : valeur moyenne

On admet que l'intensité moyenne du faisceau lumineux lorsque la concentration varie de 0,5 mol.L^{-1} à 1,3 mol.L^{-1} est égale à : $m = \dfrac{5}{4}\displaystyle\int_{0,5}^{1,3} I(c)\,\mathrm{d}c$.

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{kx}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$ donc la fonction I a pour primitive la fonction $c \longmapsto -\dfrac{0,001}{1,58}\,\mathrm{e}^{-1,58c}$.
Donc :

$$m = \frac{5}{4}\int_{0,5}^{1,3} I(c)\,\mathrm{d}c = \frac{5}{4}\left[-\frac{0,001}{1,58}\,\mathrm{e}^{-1,58c}\right]_{0,5}^{1,3} = \frac{5}{4}\left[\left(-\frac{0,001}{1,58}\,\mathrm{e}^{-1,58\times1,3}\right) - \left(-\frac{0,001}{1,58}\,\mathrm{e}^{-1,58\times0,5}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{4} \times \frac{0,001}{1,58}\left[-\mathrm{e}^{-2,054} + \mathrm{e}^{-0,79}\right] = \frac{5}{6320}\left[\mathrm{e}^{-0,79} - \mathrm{e}^{-2,054}\right] \approx 3 \times 10^{-4}$$