Corrigé du baccalauréat STL biotechnologies
Métropole–La Réunion 8 septembre 2016

Calculatrice autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

EXERCICE 1 **4 points**

Une cuisson non juste de la viande de bœuf peut provoquer une intoxication alimentaire. Les bactéries en cause sont des souches d'*Escherichia coli*. Pour mieux prévoir les aptitudes de survie et de développement de cette bactérie dans les aliments, on étudie en fonction du temps la croissance de ces souches placées dans un milieu de culture. On appelle C_i la concentration en bactéries en millions par mL. Voici les résultats obtenus :

Temps t_i en minutes	0	30	60	90	120	150
Concentration C_i en millions par mL	13	16	36	108	270	785

1. On pose $y_i = \ln(C_i)$.

a. Le tableau de valeurs est complété sur l'annexe 1, les résultats sont arrondis à 10^{-2}.

b. Nous avons représenté le nuage de points $M_i\left(t_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal avec 1 cm pour 10 min en abscisses et 2 cm pour 1 unité en ordonnées.

c. Déterminons les coordonnées de G, point moyen du nuage.
Les coordonnées de G sont $\left(\overline{t}\ ;\ \overline{y}\right)$.

$$\overline{t_G} = \frac{0+30+60+\cdots+150}{6} = 75 \quad \overline{y_G} = \frac{2{,}56+2{,}77+\cdots+6{,}67}{6} = 4{,}31$$

Le point G (7 ; 4,31) est placé dans le repère précédent.

2. On réalise un ajustement affine de ce nuage de points.

a. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite D d'ajustement de y en t obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 0{,}0286t + 2{,}1627$.

b. La droite D est tracée sur le graphique de la question 1.

3. Estimons, selon ce modèle d'ajustement, la concentration en bactéries présentes dans le milieu de culture au bout de 4 heures.

En minutes $t = 240$. Remplaçons t par cette valeur dans l'équation de la droite

$y = 0{,}0286 \times 240 + 2{,}1627 = 9{,}067$ d'où $C = \text{e}^{9{,}067} \approx 8\,322{,}35$.

La concentration au bout de quatre est d'environ 8 322 millions de bactéries par mL.

4. Dans cette question, on considère que la concentration (en millions par mL) en bactéries présentes à l'instant t (en minutes) dans le milieu de culture est donnée par

$$C(t) = 8,6\text{e}^{0{,}0287t}.$$

Déterminons au bout de combien de temps cette concentration dépassera le milliard de bactéries par mL. Pour ce faire, résolvons $8{,}6\text{e}^{0{,}0287t} \geqslant 1\,000$. Un milliard vaut mille millions.

$8{,}6\mathrm{e}^{0{,}0287t} \geqslant 1\,000 \qquad \mathrm{e}^{0{,}0287t} \geqslant \dfrac{1\,000}{8{,}6} \qquad 0{,}0287t \geqslant \ln\left(\dfrac{1\,000}{8{,}6}\right) \qquad t \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{1\,000}{8{,}6}\right)}{0{,}0287}$.

$\dfrac{\ln\left(\dfrac{1\,000}{8{,}6}\right)}{0{,}0287} \approx 165{,}71$

La concentration aura dépassé le milliard de bactéries par mL au bout de 165 heures et 43 minutes.

EXERCICE 2 — 4 points

À l'Île de La Réunion, la variété d'ananas la plus cultivée est l'ananas Victoria.
L'exportation de cette variété d'ananas vers la métropole est en plein essor. Une coopérative réunionnaise se consacre exclusivement à l'exportation d'ananas Victoria vers la métropole.
Entre 2012 et 2015, la coopérative a augmenté ses exportations de 10,5 % par an. En 2015, les exportations ont atteint 1 100 tonnes.

Le but de cet exercice est d'étudier deux modélisations différentes de l'évolution de la quantité d'ananas Victoria exportés par cette coopérative.

1. Dans cette question, on s'intéresse à une première modélisation : on suppose qu'après 2015, les exportations vont continuer à progresser de 10,5 % par an. Ainsi, la situation peut être modélisée par une suite géométrique (u_n) où pour tout entier naturel n, u_n est une estimation de la quantité, en tonnes, d'ananas exportés en $2015+n$. On a : $u_0 = 1\,100$.

a. La quantité, arrondie à la tonne, d'ananas que la coopérative peut prévoir d'exporter en 2016 est u_1.

À une augmentation de 10,5 % correspond un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{10{,}5}{100}$ c'est-à-dire 1,105.

$u_1 = 1\,100 \times 1{,}105 \approx 1\,216$.

La quantité, arrondie à la tonne, d'ananas que la coopérative peut prévoir d'exporter en 2016 est de 1 216 tonnes.

b. Déterminons en quelle année, cette coopérative peut prévoir exporter plus de 2 000 tonnes d'ananas.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,105 et de premier terme 1 100. Le terme général de la suite s'écrit alors, $u_n = 1\,100 \times (1{,}105)^n$.

Résolvons $1\,100 \times (1{,}105)^n \geqslant 2\,000$

$(1{,}105)^n \geqslant \dfrac{2\,000}{1\,100} \qquad n \ln 1{,}105 \geqslant \ln\left(\dfrac{20}{11}\right) \qquad n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{20}{11}\right)}{\ln 1{,}105}$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{20}{11}\right)}{\ln 1{,}105} \approx 5{,}9876$. La coopérative peut estimer exporter plus de 2 000 tonnes d'ananas à partir de 2021(2015+6).

c. Déterminons la limite de la suite (u_n).

La suite (u_n), étant une suite géométrique de raison q avec $q > 1$, tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

2. Dans cette question, l'exportation des ananas est modélisée par la suite (v_n), définie par :

$v_0 = 1\,100$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}7v_n + 477$ où v_n est une estimation de la quantité, en tonnes, d'ananas exportés en $2015+n$.

On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables :	V nombre réel, N, K entiers
Entrée :	Saisir N
Traitement :	
	V prend la valeur 1 100
	Pour K variant de 1 à N
	V prend la valeur $0,7 \times V + 477$
	Fin pour
Sortie :	Afficher V

On saisit $N = 3$.

a. La valeur affichée par cet algorithme en sortie est 1 421,93. La coopérative peut estimer, selon ce modèle, exporter en 2018 environ 1 422 tonnes d'ananas.

b. On dispose du tableau de valeurs suivant :

N	5	10	15	20	25	30
v_N	1 508	1 576	1 588	1 589	1 590	1 590

Nous pouvons conjecturer que la limite de la suite (v_n) est 1 590.

3. Entre la modélisation proposée à la question 1 et celle proposée à la question 2, la première serait à privilégier puisqu'elle permet un développement continu. Dépasser les 2 000 tonnes à l'exportation ne semble pas être un objectif irréalisable.

variante : Entre la modélisation proposée à la question 1 et celle proposée à la question 2, la seconde serait à privilégier car la production d'ananas n'est pas infinie même en augmentant les rendements et la surface cultivable ne peut être étendue infiniment. La coopérative augmente quand même ses exportations de près de 45 % en vingt ans.

EXERCICE 3 — 5 points

Dans une usine du secteur de l'agroalimentaire, on teste le fonctionnement d'une machine à embouteiller de l'eau. On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute bouteille prise au hasard dans la production, associe le volume d'eau en litres qu'elle contient. On admet que, lorsque la machine est bien réglée, X suit la loi normale d'espérance $\mu = 1,5$ et d'écart type $\sigma = 0,01$.

On arrondira les probabilités au centième.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminons la probabilité $P(X \leqslant 1,49)$.

$P(X \leqslant 1,49) \approx 0,1587$ soit 0,16 arrondie au centième.

Une bouteille d'eau est conforme lorsqu'elle contient entre 1,48 et 1,52 litre d'eau.

2. On prélève au hasard une bouteille d'eau de la production.

a. À l'aide de la calculatrice, déterminons la probabilité que cette bouteille d'eau soit conforme aux normes de l'entreprise, $p(1,48 \leqslant X \leqslant 1,52) \approx 0,9545$ soit 0,95 arrondie au centième.

b. Nous aurions pu obtenir ce résultat sans calculatrice en observant que $p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = p(1,48 \leqslant X \leqslant 1,52)$.

3. Le directeur de l'usine souhaite que la proportion de bouteilles d'eau conformes soit égale à 97 %. Les techniciens effectuent un nouveau réglage de la machine à embouteiller et affirment que la proportion de bouteilles d'eau conformes est bien égale à 97 %. Un contrôle sur un échantillon de 500 bouteilles est effectué, pour juger de l'efficacité de ce réglage,

a. Déterminons, en arrondissant les bornes à 10^{-3}, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion p de bouteilles d'eau conformes dans un échantillon de taille 500.

L'intervalle d'estimation de cette proportion avec un niveau de confiance de 95 % est :

$$\left[p-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p+1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$\left[0,97-1,96\sqrt{\frac{0,97(1-0,97)}{500}}\ ;\ 0,97+1,96\sqrt{\frac{0,97(1-0,97)}{500}}\right]\approx\left[0,955\ ;\ 0,985\right]$$

b. Parmi les 500 bouteilles de l'échantillon, on observe que 476 sont conformes.

Nous avons déterminé un intervalle de confiance I au niveau de 95 % de la proportion p de bouteilles conformes; cela signifie que la probabilité que cet intervalle contienne la proportion en question est supérieure à 95 %.

La proportion de bouteilles conformes dans cet échantillon est $\dfrac{476}{500}=0,952$.

Or $0,952$ n'appartient pas à l'intervalle I.

Donc nous pouvons dire que cette observation remet en question l'efficacité du réglage avec un risque d'erreur de 5 %.

4. On veut mesurer la durée de bon fonctionnement de machines à embouteiller sur le point d'être livrées à l'usine.

On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute machine prélevée au hasard parmi les machines sur le point d'être livrées, associe sa durée de vie en jours avant une défaillance, On suppose que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans cette livraison prévue n'ait pas de défaillance avant l'instant t, exprimé en jours, est

$$p(T\geqslant t)=\mathrm{e}^{-0,005t}.$$

a. Calculons la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans la livraison prévue fonctionne plus de 200 jours sans défaillance.

$p(T\geqslant 200)=\mathrm{e}^{-0,005\times 200}\approx 0,3679$ soit 0,37 arrondie au centième.

b. Déterminons le réel t pour que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans la livraison prévue fonctionne moins de t jours sans défaillance soit égale à $0,2$.

Considérons le problème contraire. Déterminons t pour qu'une machine prélevée au hasard fonctionne sans défaillance plus de t jours avec une probabilité égale à 0,8.

Pour ce faire, résolvons $p(T\geqslant t)=0,8$ c'est-à-dire $\mathrm{e}^{-0,005t}=0,8$.

$-0,005t=\ln 0,8 \quad t=\dfrac{\ln 0,8}{-0,005}\approx 44,62$

Une machine prélevée au hasard fonctionnera moins de 45 jours sans défaillance avec une probabilité d'environ 0,2.

EXERCICE 4 — 7 points

On injecte un antibiotique en perfusion au rythme de $0,32$ milligramme par minute. On suppose que cet antibiotique n'était pas présent dans le sang avant cette perfusion. La quantité d'antibiotique présent à tout instant est modélisée par une fonction f.

Lorsque t représente le temps écoulé, en minutes, depuis le début de la perfusion, $f(t)$ représente la quantité, en milligrammes, d'antibiotique présent dans le sang.

Partie A

On admet que la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,004y = 0,32,$$

1. Résolvons l'équation différentielle (E).

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par

$y(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.

$a = 0{,}004$ $b = 0{,}32$ par conséquent sur $[0~;~+\infty[$ $f(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}004t} + \dfrac{0{,}32}{0{,}004}$

c'est-à-dire $f(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}004t} + 80$ où C est une constante quelconque.

2. **a.** $f(0) = 0$ car cet antibiotique n'était pas présent dans le sang avant cette perfusion.

b. Déterminons une expression de $f(t)$ sur $[0~;~+\infty[$.

$f(0) = C\mathrm{e}^{-0{,}004\times 0} + 80 = 0$ d'où $C = -80$

Sur $[0~;~+\infty[$, $\quad f(t) = -80\mathrm{e}^{-0{,}004t} + 80$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie pour tout t appartenant à $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = -80\mathrm{e}^{-0{,}004t} + 80.$$

1. Calculons $f'(t)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

$f'(t) = -80(-0{,}004t)\mathrm{e}^{-0{,}004t} = 0{,}32\mathrm{e}^{-0{,}004t}$.

Déterminons les variations de f sur $[0~;~+\infty[$.

Pour tout $t \in [0~;~+\infty[$, $\quad f'(t) > 0$ comme produit de deux réels strictement positifs .

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Sur $[0~;~+\infty[$, $f'(t) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

On a tracé, dans le repère donné en annexe 2, la courbe représentative C de la fonction f et la droite D, asymptote à la courbe C en $+\infty$.

2. À l'aide du graphique, la limite de la fonction f est 80. D est la droite asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Cette valeur est appelée quantité limite de l'antibiotique présent dans le sang.

3. Le débit de perfusion est satisfaisant si 90 % de la quantité limite de l'antibiotique est, arrivée dans le sang au bout de 10 heures. Déterminons, de deux façons différentes, si le débit de perfusion est satisfaisant :

a. À l'aide du graphique

90 % de la quantité limite correspond à 72. Traçons la droite d'équation $y = 72$ et lisons l'abscisse du point d'intersection de cette droite et de la courbe représentative de f. Nous obtenons environ 575. Au bout de 575 minutes soit 9 heures trente-cinq minutes, 90 % de la quantité limite est arrivée dans le sang. Il en résulte que le débit de la perfusion est satisfaisant.

b. Sans le graphique, résolvons alors $f(t) = 72$ soit $-80\text{e}^{-0,004t} + 80 = 72$

$$\begin{aligned} -80\text{e}^{-0,004t} + 80 &= 72 \\ -80\text{e}^{-0,004t} &= -8 \\ \text{e}^{-0,004t} &= 0,1 \\ \text{e}^{0,004t} &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0,004t &= \ln 10 \\ t &= \frac{\ln 10}{0,004} \\ t &\approx 575,646 \end{aligned}$$

Le débit de la perfusion est donc satisfaisant.

4. On admet que la quantité moyenne de l'antibiotique présente dans le sang pendant les cinq premières heures de perfusion est égale à $\dfrac{1}{300}\displaystyle\int_0^{300} f(t)\,\text{d}t$.

a. Démontrons que la fonction F définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(t) = 20\,000\text{e}^{-0,004t} + 80t$ est une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.

F est une primitive de f sur I lorsque $F' = f$.

Déterminons $F'(x)$. $F'(x) = 20\,000\left(-0,004\text{e}^{-0,004t}\right) + 80 = -80\text{e}^{-0,004t} + 80 = f(t)$.

Il en résulte que F est une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.

b. Calculons $I = \displaystyle\int_0^{300} f(t)\,\text{d}t$.

$I = \displaystyle\int_0^{300} f(t)\text{d}t = \left[20\,000\text{e}^{-0,004t} + 80t\right]_0^{300} = 20\,000\text{e}^{-0,004\times 300} + 80\times 300 - 20\,000$

$I = 20\,000\text{e}^{-1,2} + 4\,000 \approx 10\,023,88$

Sur $[0~;~300]$, f est une fonction positive. I peut donc s'interpréter comme l'aire du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 300$.

c. Déterminons la quantité moyenne de l'antibiotique présent dans le sang pendant les cinq premières heures de perfusion au dixième de milligramme près.

$\dfrac{1}{300}\displaystyle\int_0^{300} f(t)\text{d}t = \dfrac{1}{300}I = \dfrac{20\,000\text{e}^{-1,2} + 4\,000}{300} \approx 33,413.$

Une valeur approchée, au dixième de milligramme près, de la quantité moyenne de l'antibiotique présent dans le sang pendant les 5 premières heures de perfusion est 33,4.

ANNEXES
À rendre avec la copie

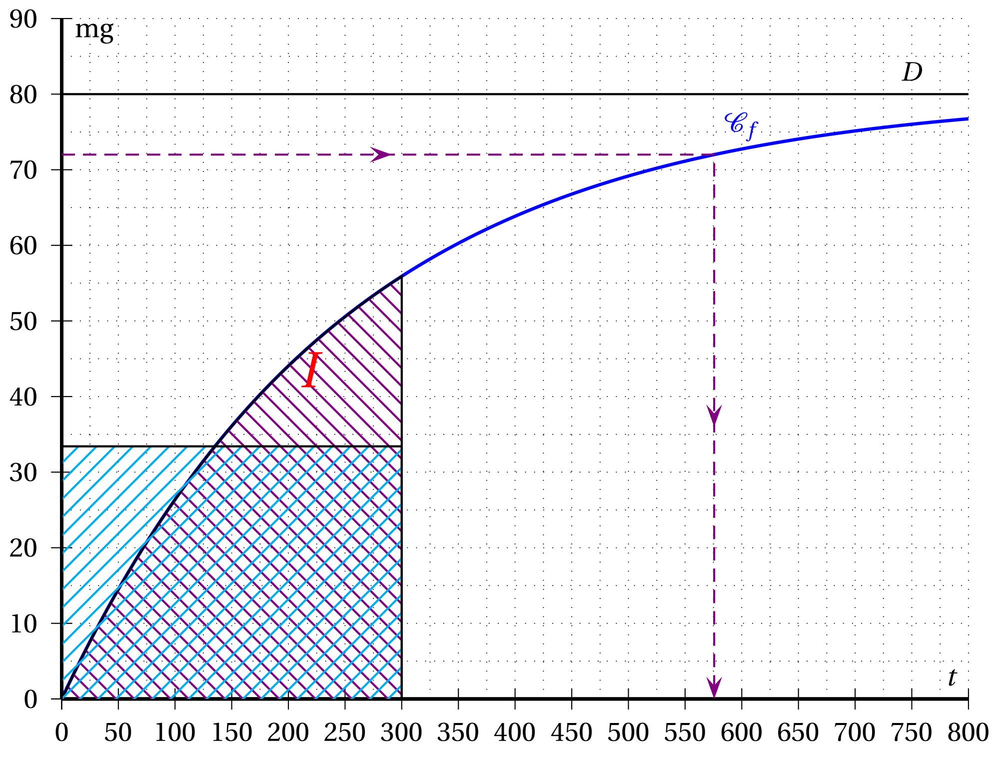
Annexe 1 (exercice 1)

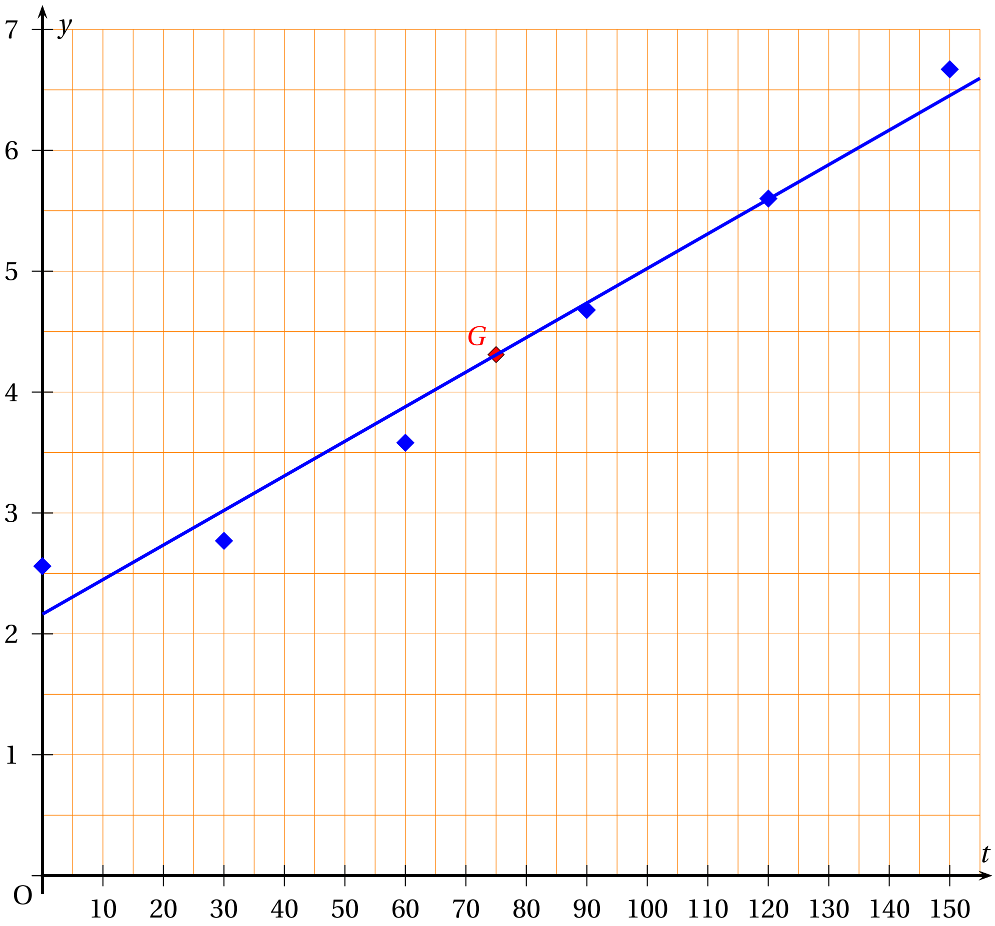
Temps t_i en minutes	0	30	60	90	120	150
y_i	2,56	2,77	3,58	4,68	5,60	6,67

Annexe 2 (exercice 4) :

représentation graphique de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = -80\mathrm{e}^{-0,004t} + 80.$$




y
t
O
1
2
3
4
5
6
7
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
G