∽ Corrigé du baccalauréat STL biotechnologies ∾ Métropole–La Réunion 16 juin 2016

EXERCICE 1 **6 points**

1. M suit la loi $\mathcal{N}(250\,;\,5^2)$ et un fromage est refusé si sa masse est inférieure à 240 g.

   On cherche donc grâce à la calculatrice $P(M < 240) = 0,023$ à 10^{-3} près.

   La probabilité qu'un fromage frais prélevé au hasard dans la production soit refusé est de 0,023.

2. **a.** X compte le nombre de fromages en sous-poids dans un tirage supposé avec remise de 150 fromages avec probabilité d'être en sous poids pour chacun d'eux de 2 %.

   On en déduit que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 2\,\% = 0,02$.

   b. On cherche $P(X \leqslant 5) = 0,918$ arrondi à 10^{-3} à la calculatrice.

   La probabilité qu'il y ait dans le prélèvement au maximum cinq fromages de masse insuffisante est de $0,918$.

   c. D'après le cours, lorsque X suit la loi $\mathcal{B}(n\,;\,p)$ alors $E(X) = n \times p$,

   donc ici $E(X) = 150 \times 0,02 = 3$.

   Cela signifie que sur un grand nombre d'échantillons de 150 fromages, on trouvera en moyenne dans chaque échantillon 3 fromages en sous-poids.

3. **a.** L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence f des consommateurs de la laiterie préférant les fromages secs dans un échantillon de 400 personnes sachant que la laiterie estime la proportion de consommateurs préférant les fromages secs à $p = 18\,\%$ est :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

   ce qui donne avec les bornes arrondies à 10^{-3} suivant les règles vues en cours :

$$I = [0,142\ ;\ 0,218]$$

   b. La fréquence observée dans cet échantillon est de $\dfrac{55}{400} = 0,1375 \notin I$.

   On en déduit, au risque d'erreur 5 %, que la laiterie doit considérer que la préférence des consommateurs a changé.

4. **a.** T suit une loi exponentielle de paramètre λ donc $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

   L'énoncé dit qu'en moyenne une balance reste réglée correctement 90 h donc $E(T) = 90$.

   On en déduit que $\lambda = \dfrac{1}{90}$

b. Calculons $P(T \geqslant t_0) = 1 - P(T \leqslant t_0) = 1 - \int_0^{t_0} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^{t_0} = \mathrm{e}^{-\lambda t_0}$

On cherche t_0 tel que

$$\begin{aligned} P(T \geqslant t_0) = 0,93 &\iff \mathrm{e}^{-\lambda t_0} = 0,93 \\ &\iff -\lambda t_0 = \ln(0,93) \\ &\iff t_0 = -\frac{\ln(0,93)}{\lambda} \\ &\iff t_0 = -90\ln(0,93) \\ P(T \geqslant t_0) = 0,93 &\iff t_0 = 6,5\,\text{h arrondi à } 0,1 \end{aligned}$$

Cela signifie que pour 93 % des balances, le temps de fonctionnement sans dérèglement sera supérieur à 6,5 h. On peut aisément en déduire que 7 % des balances se dérégleront en moins de 6,5 h de fonctionnement.

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** Les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' + 0,162y = 20,3$ sont les fonctions f_k définies sur $[0 ; 60]$ de la forme $f_k(t) = k\mathrm{e}^{-0,162t} + \dfrac{20,3}{0,162}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

b. On sait que $f(0) = 21$.

On cherche donc k tel que $f_k(0) = 21 \iff k + \dfrac{20,3}{0,162} = 21 \iff k = 21 - \dfrac{20,3}{0,162}$

donc $f(t) = 125,308 - 104,309\mathrm{e}^{-0,162t}$. (On a arrondi les constantes à 10^{-3})

2. **a.** $g(t) = 125 - 104\mathrm{e}^{-0,16t}$

On pose $u(t) = -0,16t$ donc $u'(t) = -0,16$

de plus $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$

donc $g'(t) = -104 \times (-0,16)\mathrm{e}^{-0,16t} = 16,64\mathrm{e}^{-0,16t}$

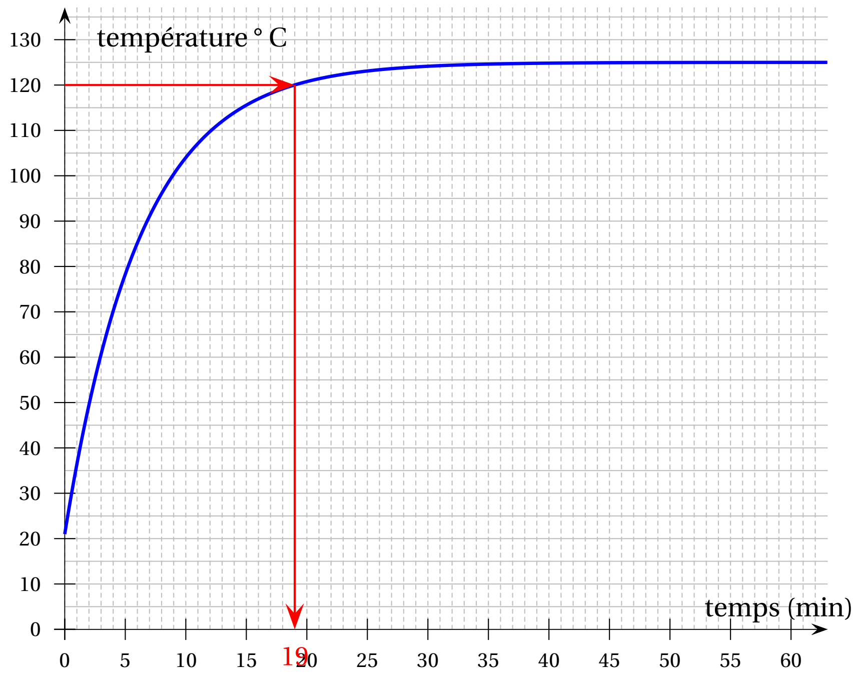
Pour $t \in [0 ; 60]$, $\mathrm{e}^{-0,16t} > 0$ donc $g'(t) > 0$

b. On déduit de la question précédente :

x	0		60
$g'(t)$		+	
g	0	$\nearrow$	125

3. **a.** La température au bout de 9 minutes est $g(9) = 100$ °arrondi au degré.

b. Par lecture graphique, la température atteint 120 °au bout de 19 minutes, on pourra donc arrêter l'autoclave 3 minutes plus tard soit au bout de 23 minutes

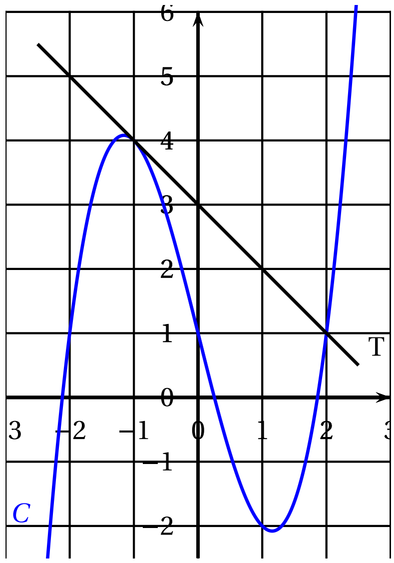


c. On résout :

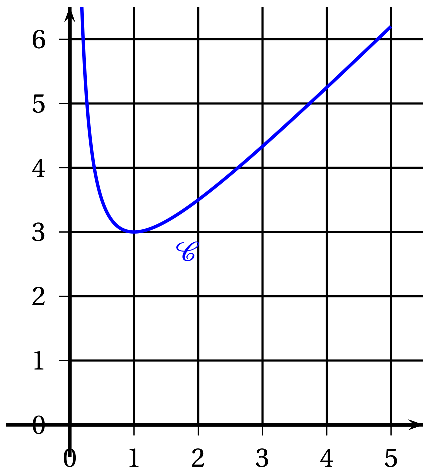
$$\begin{aligned} g(t) > 120 &\iff 125 - 104\mathrm{e}^{-0,16t} > 120 \\ &\iff 104\mathrm{e}^{-0,16t} < 5 \\ &\iff \mathrm{e}^{-0,16t} < \frac{5}{104} \\ &\iff -0,16t < \ln\left(\frac{5}{104}\right) \\ &\iff t > -\frac{1}{0,16}\ln\left(\frac{5}{104}\right) \\ &\iff t > 19\,\text{min (arrondi à l'unité)} \end{aligned}$$

puis on fait le même raisonnement qu'à la question précédente.

Exercice 3 **4 points**

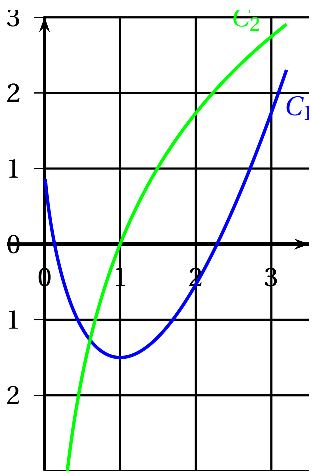


1. La courbe C ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4~;~4]$. La droite T est la tangente à la courbe C au point d'abscisse -1.
$f(-1) = 4$
$f'(-1) = -1$ (coefficient directeur de la tangente T)



2. La fonction g est positive sur $[1~;~4]$ donc l'aire cherchée vaut en unités d'aire :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_1^4 \frac{1}{x} + x + 1\,\mathrm{d}x\\
&= \left[\ln x + \frac{x^2}{2} + x\right]_1^4\\
\mathscr{A} &= \frac{21}{2} + \ln 4
\end{aligned}$$



3. Le graphique ci-contre donne deux courbes C_1 et C_2.
Ces deux courbes sont représentatives de deux fonctions définies sur $]0~;~+\infty[$: une fonction h et une de ses primitives H.
On remarque que C_1 descend lorsque C_2 est en dessous de l'axe des abscisses et que C_1 monte lorsque C_2 est au-dessus de l'axe des abscisses. Comme on sait que $H' = h$ on en déduit que la courbe de H est C_1.

Exercice 4 **5 points**

1. **a.** Pour augmenter un nombre de 6%, on le multiplie par $1 + 6\% = 1,06$ donc $d_1 = 1,06 \times d_0 = 10,6$

b. Pour la même raison qu'à la question précédente, on montre que pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = (1+6\%)d_n = 1,06d_n$ donc la suite (d_n) est géométrique de raison $q = 1,06$ et donc pour tout entier naturel n, $d_n = d_0 \times q^n = 10 \times 1,06^n$.

c. La distance qu'Alice pourra parcourir en septembre 2014 est $d_8 = 10 \times 1,06^8 =$ $15,9$ km arrondi à 0,1km.

d. On cherche n tel que

$$\begin{aligned} d_n \geqslant 25 &\iff 10 \times 1,06^n \geqslant 25 \\ &\iff 1,06^n \geqslant 2,5 \\ &\iff n \times \ln 1,06 \geqslant \ln 2,5 \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln 2,5}{\ln 1,06} \\ &\iff n \geqslant 16 \end{aligned}$$

Alice sera capable de courir en une fois 25 km au bout de 16 mois.

2. **a.** Avec cet algorithme, Alice cherche à savoir au bout de combien de mois (après septembre 2015) elle mettra moins de 50 minutes pour parcourir les 10 premiers kilomètres de la course.

b.

Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur de t (arrondie à 10^{-2})	60	58,80	57,62	56,47	55,34	54,23	53,15	52,09	51,05	50,03	49,03

c. Les valeurs affichées en sortie par l'algorithme sont $N = 10$ et $t = 49,03$.

Alice peut en déduire qu'elle mettra moins de 50 minutes pour parcourir les 10 premiers kilomètres en juillet 2016 ($N = 10$)

d. En novembre 2016, $N = 14$. Alice courra les 10 premiers kilomètres en $t = 60 \times 0,98^{14} = 45$ minutes soit 0,75 h.

Elle courra donc à une vitesse moyenne
$v = \dfrac{10}{0,75} = 13,33$ km.h^{-1}.

À 82 % de cette vitesse elle courra le semi-marathon à une vitesse moyenne $v_m = 0,82 * v = 10,93$ km.h^{-1}.

Elle mettra donc $t_m = \dfrac{21}{10,93} = 1,92$ h pour parcourir les 21 km du semi marathon. Elle devrait donc réussir à se qualifier.