Corrigé du baccalauréat STL biotechnologies Nouvelle Calédonie 26 novembre 2019

EXERCICE 1 **6 points**

Une certaine quantité de pénicilline est injectée dans le sang d'un patient.
On suppose que l'injection est instantanée et que la vitesse de son élimination est proportionnelle à la quantité restant dans le sang.
On note t le temps écoulé, en minute, après injection de la pénicilline, et $f(t)$ la quantité, en milligramme, de pénicilline présente dans le sang à l'instant t.
La fonction f, ainsi définie, est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' = -0,04y.$$

Dans cet exercice, la quantité de pénicilline injectée est inconnue, mais on sait que le sang du patient contenait 3,03 mg de pénicilline, 40 minutes après injection.

Tous les résultats seront arrondis à 0,01 *près.*

Partie A – Solution de l'équation différentielle

1. Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.
   $a = 0{,}04$ $b = 0$ par conséquent sur $[0~;~+\infty[$, $f(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}04t}$ où C est une constante quelconque.
2. Déterminons la solution f définie sur $[0~;~+\infty[$, de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(40) = 3,03$.
   $f(40) = C\mathrm{e}^{-0{,}04\times 40} = 3{,}03 \quad C = \dfrac{3{,}03}{\mathrm{e}^{-1{,}6}} \approx 15{,}01.$

Pour la suite de l'exercice, on prendra $f(t) = 15\,\mathrm{e}^{-0{,}04t}$.

Partie B – Étude de la fonction f

1. La quantité de pénicilline initialement injectée dans le sang du patient est $f(0)$ c'est-à-dire 15.
2. **a.** Déterminons la fonction dérivée f' de la fonction f. $f'(t) = 15 \times ((-0{,}04)\mathrm{e}^{0{,}04t}) = -0{,}6\mathrm{e}^{-0{,}04t}$.

   b. Étudions les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   Pour tout $t \in [0~;~+\infty[$, $f'(t) < 0$ comme produit d'un nombre réel strictement positif et d'un nombre réel strictement négatif.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
   Sur $[0~;~+\infty[$, $f'(t) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
Variation de f	15 $\searrow$	0

   c. Déterminons $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.
   $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 15 \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}04t} = 0$ puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$.
3. Déterminons, par le calcul, la durée pendant laquelle la quantité de pénicilline dans le sang sera strictement supérieure à 0,1 mg.
   Pour ce faire résolvons $15\mathrm{e}^{-0{,}04t} > 0{,}1$.

$$\frac{15}{\mathrm{e}^{0,04t}} > 0,1 \qquad\qquad \ln\left(\mathrm{e}^{0,04t}\right) < \ln(150)$$
$$15 > 0,1\mathrm{e}^{0,04t} \qquad\qquad 0,04t < \ln(150)$$
$$\mathrm{e}^{0,04t} < 150 \qquad\qquad t < \frac{\ln(150)}{0,04}$$

$\dfrac{\ln(150)}{0,04} \approx 125,26588$. $125 = 2\times 60+5$.

Pendant un peu plus de deux heures et cinq minutes, la quantité de pénicilline sera strictement supérieure à 0,1 mg.

Partie C – Quantité moyenne de pénicilline

L'utilisation d'un logiciel de calcul formel nous donne les résultats suivants :

1	$f(t) = 15 * \exp(-0,04t)$ $\longrightarrow f(t) = 15\mathrm{e}^{-\frac{1}{25}t}$
2	Intégrale$(f,0,30)$ $\approx 262,05$

1. Calculons $\displaystyle\int_0^{30} 15\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{25}t}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_0^{30} 15\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{25}t}\,\mathrm{d}t = \left[-15\times 25\mathrm{e}^{-\frac{1}{25}t}\right]_0^{30} = -375\times\mathrm{e}^{-\frac{30}{25}}+375 \approx 262,05$$

2. La quantité moyenne de pénicilline dans le sang du patient pendant les 30 premières minutes peut être obtenue grâce à l'expression suivante :

$$\frac{1}{30}\int_0^{30} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminons la quantité moyenne de pénicilline présente dans le sang du patient étudié lors des 30 premières minutes.

En utilisant le résultat précédent, en mg la quantité moyenne présente dans le sang durant les trente premières minutes est $\dfrac{262,05}{30}$ soit 8,735 mg.

EXERCICE 2 **5 points**

Toutes les représentations graphiques seront réalisées sur l'annexe de la page .7

Partie A – Présentation de l'étude

Un objet est vidéoprojeté, en trois dimensions, à une distance comprise entre 2 et 10 mètres. L'expérience, étudiée dans cet exercice, consiste à demander à une personne d'estimer la distance à laquelle se trouve l'objet. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Distance réelle en m (x_i)	2	2,5	3	3,5	4	5	6	7	8	10
Distance perçue en m (y_i)	1,9	2,4	2,8	3,3	3,7	4,3	4,7	5	5,4	6

1. Nous pouvons remarquer concernant la perception des distances que pour des petites distances la distance perçue est proche de la distance réelle mais que plus la distance réelle augmente et plus la distance perçue devient de plus en plus inférieure à celle-ci.

2. Le nuage des points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ est représenté dans le repère en annexe, **à rendre avec la copie.**

Partie B – Étude d'un premier modèle : la loi de Stevens

1. On pose $t_i = \ln(x_i)$ et $z_i = \ln(y_i)$

a. Nous avons complété le tableau donné en annexe en arrondissant les valeurs à 0,1 près.

b. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de z en t par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = at + b$ est $z = 0{,}72t + 0{,}22$. Les coefficients a et b sont arrondis à 0,01 près.

2. À l'aide de la question précédente, déterminons une relation entre y et x sous la forme $y = \alpha \mathrm{e}^{\beta t}$ où les coefficients α et β seront arrondis à 0,01 près.

$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\ln y} = y = \mathrm{e}^{0{,}72t+0{,}22} = \mathrm{e}^{0{,}22} \times \mathrm{e}^{0{,}72t}$.

Or $\mathrm{e}^{0{,}72t} = \left(\mathrm{e}^t\right)^{0{,}72} = \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^{0{,}72} = x^{0{,}72}$.

Finalement $y = \mathrm{e}^{0{,}22} \times x^{0{,}72}$. Or $\mathrm{e}^{0{,}22} \approx 1,246 \approx 1,25$ au centième près.

La relation entre x et y est donc approximativement :

$$y = 1,25x^{0{,}72}.$$

Cette relation est appelée loi de Stevens.

La courbe d'équation $y = 1,25x^{0{,}72}$ est donnée en annexe.

3. Selon ce modèle, calculons la distance réelle, arrondie à 0,1 mètre, à laquelle serait placé un objet perçu à 7 m.

Résolvons $7 = 1,25x^{0{,}72}$. $x^{0{,}72} = \frac{7}{1{,}25} = 5{,}6$ d'où $x = 5{,}6^{1/0{,}72} \approx 10{,}9$.

En extrapolant les données un objet perçu à 7 m serait en réalité à 10,9 m.

Partie C – Étude d'un second modèle : le modèle logarithmique inspiré de la loi de Fechner

Le modèle logarithmique propose une autre relation entre la distance perçue et la distance réelle. Dans la situation étudiée, on a :

$$y = 2,6\ln(x) + 0,1.$$

1. Sur le repère de l'annexe, la courbe d'équation $y = 2,6\ln(x) + 0,1$ a été tracée.

2. Comparons les deux modèles : Selon le modèle logarithmique entre 2,4 m et 7,6 m la distance perçue est plus proche de la distance réelle qu'avec la loi de Stevens.

Pour des distances réelles plus grandes les distances perçues sont de plus en plus inférieures à la réalité mais c'est le modèle de la loi de Stevens qui est le moins mauvais. (On a tracé en vert la droite « parfaite » $y = x$ selon laquelle la distance perçue serait égale à la distance réelle.

3. Selon ce modèle, calculons la distance réelle, arrondie à 0,1 mètre, à laquelle serait placé un objet perçu à 7 m.

Résolvons $7 = 2,6\ln x + 0,1$. $\ln x = \frac{6{,}9}{2{,}6}$ d'où $x = \mathrm{e}^{6{,}9/2{,}6} \approx 14{,}2$.

EXERCICE 3 — 5 points

La farine de blé est classée selon des « types » définis en fonction du taux de cendres, c'est-à-dire en fonction du taux de minéraux présents dans la farine.

Cette teneur en matière minérale est obtenue en brûlant de la farine et en rapportant la masse du résidu de cendres à la masse de farine brûlée.

Quelques exemples de types de farines sont répertoriés dans le tableau ci-dessous :

Type de farine	Taux de cendres en %	Nom commun
T55	entre 0,5 et 0,6	farine blanche
T65	entre 0,62 et 0,75	farine bise
T80	entre 0,75 et 0,9	farine semi-complète
T110	entre 1 et 1,2	farine complète

L'exercice porte sur l'étude de la production de la **farine complète** d'une minoterie (établissement dans lequel sont préparées les farines de céréales).

Tous les résultats seront arrondis à 0,001 *près.*
Les parties A *et* B *peuvent être traitées indépendamment.*

Partie A – Loi normale

Soucieuse de la qualité de la production de sa **farine complète**, la minoterie décide de procéder à un contrôle du taux de cendres. Celui-ci consiste à choisir au hasard un paquet de farine, à en prélever 100 g, à le brûler et enfin à en mesurer la masse de cendres. Le paquet est considéré comme **conforme** si le taux de cendres est celui répertorié ci-dessus.

1. Montrons que le paquet de farine complète de la production est conforme si la masse du résidu de cendres est comprise entre 1 000 mg et 1 200 mg.

   Sachant que le taux de cendre pour une farine complète est compris entre 1 % et 1,2 % , dans le prélèvement de 100 g nous devons trouver une masse de résidu en gramme entre $100 \times \frac{1}{100}$ soit 1 et $100 \times \frac{1,2}{100}$ soit 1,2. Par conséquent entre 1 000 mg et 1 200 mg.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un prélèvement de 100 g d'un paquet de farine, associe la masse du résidu obtenu en mg. On admet que Y suit la loi normale d'espérance 1 100 et d'écart-type 40.

   La probabilité qu'un paquet pris au hasard dans la production de farine complète soit conforme est $p(1000 \leqslant Y \leqslant 1200)$.

   À l'aide de la calculatrice nous trouvons $p(1000 \leqslant Y \leqslant 1200) \approx 0,988$.

3. La minoterie affirme que sa production ne contient pas plus de 5 % de paquets de farine complète non conformes. Or, lors d'un contrôle qualité sur un échantillon de 150 paquets, on observe 10 paquets de farine complète non conformes.

   a. Nous avons $n = 150$ et $p = 0,05$. Les conditions $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ sont satisfaites car $n = 150$, $np = 7,5$ et $n(1-p) = 142,5$.

   b. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence de paquets de farine complète non conformes dans un échantillon de 150 paquets prélevés. L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n, lorsque la proportion p dans la population est connue est :

   $$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ,\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

   $$\left[0,05 - 1,96\sqrt{\frac{0,05(1-0,05)}{150}}\ ,\ 0,05 + 1,96\sqrt{\frac{0,05(1-0,05)}{150}}\right] \approx [0,016\ ;\ 0,084]$$

   c. Énonçons la règle de décision sur l'hypothèse selon laquelle 5 % des paquets de farine complète de la minoterie sont non conformes.

   Si la fréquence effectivement observée des paquets de farine complète de la minoterie sont non conformes appartient à l'intervalle de fluctuation, on accepte l'hypothèse, sinon,on rejette l'hypothèse.

   d. La fréquence observée est $\frac{10}{150} \approx 0,0667$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation à 95 %. Au risque de 5 %, nous pouvons accepter l'affirmation de la minoterie.

Partie B – Loi binomiale

On admet que 5 % des paquets de la production de farine complète ne sont pas conformes. On choisit, au hasard, un lot de 100 paquets de farine complète dans la production. On admet que la production est suffisamment importante pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 100 paquets.
On note X la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 paquets de type T110, associe le nombre de paquets non conformes.

1. Justifions que la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,05$.

   X est distribuée selon la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,05$ puisque il y a répétition de 100 tirages indépendants et identiques caractérisés par deux issues soit le paquet de farine n'est pas conforme avec une probabilité $p = 0,05$ soit le paquet est conforme de probabilité $q = 1 - p = 0,95$.

   Par conséquent, $p(X = k) = \binom{100}{k}(0,05)^k(0,95)^{100-k}$.

2. Calculons la probabilité qu'il y ait exactement 2 paquets non conformes.

   $p(X = 2) = \binom{100}{2}(0,05)^2(0,95)^{100-2} \approx 0,081$.

3. Calculons la probabilité qu'il y ait exactement 96 paquets conformes. Calculons la probabilité de l'événement contraire c'est-à-dire qu'il y ait 4 paquets non conformes.

   $p(X = 4) = \binom{100}{4}(0,05)^4(0,95)^{100-4} \approx 0,178$.

   Il en résulte que la probabilité qu'il y ait exactement 96 paquets conformes est : $1 - 0,178 = 0,822$

4. **a.** $P(X \leqslant 3) \approx 0,258$. Ce résultat dans le contexte de l'exercice est la probabilité qu'il y ait au plus trois paquets non conformes dans l'échantillon.

   b. $P(X \geqslant 4) = 1 - p(X \leqslant 3) = 1 - 0,258 = 0,742$.

   La probabilité qu'il y ait au moins quatre paquets non conformes est 0,742.

EXERCICE 4 **4 points**

La consommation finale brute d'énergie représente la consommation totale d'énergie sur une année, elle est exprimée en tonnes-équivalent-pétrole : TEP.

En France, la part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie a progressé selon les données du tableau ci-contre :

	2015	2016
Part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie (en %)	15,2	16,52

La directive 2009/28/CE du Parlement européen relative à la promotion de l'utilisation de l'énergie produite à partir de sources renouvelables définit pour chaque pays de l'Union européenne l'objectif à atteindre concernant la part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie.

L'objectif de la France est d'atteindre une part d'énergies renouvelables dans la consommation finale brute de 30 % en 2023.

Tous les résultats seront arrondis à 0,01 *près.*

Partie A – Modélisation à partir de 2015

À partir de 2015, la part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie augmente environ de 8,7 % par an.

On désire modéliser la situation par une suite (u_n), u_n représentant la part des énergies renouvelables en $(2015 + n)$. Ainsi $u_0 = 15,2$.

1. **a.** À un taux d'évolution de 0,087 correspond un coefficient multiplicateur de $1 + 0,087$ soit 1,087.

   $u_1 = u_0 \times 1,087 = 15,2 \times 1,087 = 16,5224$ soit au centième 16,52.

   b. $u_2 = 16,52 \times 1,087 = 17,96$. Ce résultat dans le contexte de l'exercice est la part, en pourcentage, des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie en 2017.

2. $u_{n+1} = 1,087 \times u_n$. Chaque terme de la suite se déduisant du précédent en le multipliant par le même nombre, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,087 et de premier terme 15,2.

3. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times (q)^n$.

   $u_n = 15,2 \times (1,087)^n$.

4. Calculons la part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie en 2020.

   En 2020, $n = 5$ d'où $u_5 = 15,2 \times (1,087)^5 \approx 23,07$.

5. **a.** Déterminons à partir de quelle année la part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie dépassera 30 %

   Pour ce faire, résolvons $u_n \geqslant 30$.

$$15,2\times(1,087)^n \geqslant 30$$
$$(1,087)^n \geqslant \frac{30}{15,2}$$
$$\ln(1,087)^n \geqslant \ln\left(\frac{30}{15,2}\right)$$
$$n\ln(1,087) \geqslant \ln\left(\frac{75}{38}\right)$$
$$n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{75}{38}\right)}{\ln(1,087)}$$
$$n \geqslant 8,150$$

Selon ce modèle, la part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie dépassera 30 % à partir de 2024

b. L'objectif fixé à la France par cette directive n'est pas atteint. En 2023, la part est encore inférieure à 30 %.

6. **a.** Le terme de la suite (u_n) correspondant à l'année 2038 est u_{23}.
$u_{23} = 15,2\times(1,087)^{23} \approx 103,54$.

b. Ce modèle à long terme n'a pas de sens puisque l'on dépasserait les 100 %, ce qui est impossible, la part est plus petite que le tout.

Partie B – L'objectif pour 2035

L'objectif fixé par l'Union européenne est qu'en 2035 la part des énergies renouvelables soit de 40 %. On estime qu'à partir de 2015 la part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie doit augmenter de 28 % **tous les cinq ans**.
On considère l'algorithme suivant :

```
u ← 15,2
Pour n allant de 1 à 4
    u ← u × 1,28
Fin Pour
```

1. La valeur de la variable u à la fin de l'exécution de l'algorithme est $15,2\times1,28^4 \approx 40,80$.

2. Si l'on considère que l'objectif de l'union européenne concerne la France en 2035 alors ce résultat montre que l'objectif sera atteint.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

EXERCICE 2
Partie B, question **1.a.**

$t_i = \ln(x_i)$	0,7	0,9	1,1	1,3	1,4	1,6	1,8	1,9	2,1	2,3
$z_i = \ln(y_i)$	0,6	0,9	1,0	1,2	1,3	1,5	1,5	1,6	1,7	1,8

Partie A, question 2.
Partie C, question 1.