∽ Corrigé du baccalauréat STL biotechnologies Polynésie ∾
13 juin 2016

EXERCICE 1 **4 points**

Dans cet exercice, on s'intéresse au taux de cholestérol LDL de la population d'adultes d'un pays.
On note X la variable aléatoire qui, à un adulte de cette population, associe son taux de cholestérol LDL, exprimé en grammes par litre.

On admet que X suit la loi normale d'espérance $1,27$ et d'écart type $0,39$.

1. **a.** Déterminons une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité qu'un adulte, choisi au hasard dans cette population, ait un taux de cholestérol LDL compris entre 1 et $1,6$ gramme par litre.
$p(1 \leqslant X \leqslant 1{,}6) \approx 0{,}557$.

b. Déterminons une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité qu'un adulte, choisi au hasard dans cette population, ait un taux de cholestérol LDL supérieur à $1,9$ gramme par litre.
$p(X \geqslant 1{,}9) \approx 0{,}053$.

2. Dans la population étudiée, 28 % des adultes souffrent d'hypercholestérolémie LDL (ils ont un taux de cholestérol LDL trop élevé).

a. L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence d'adultes souffrant d'hypercholestérolémie LDL, dans un échantillon de 300 adultes choisis au hasard dans la population étudiée est :

$$\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

$n = 300 > 30$, $np = 300 \times 0{,}28 = 84 > 5$, $n(1-p) = 300 \times 0{,}72 = 216 > 5$

$$\left[0{,}28 - 1,96\sqrt{\frac{0{,}28(1-0{,}28)}{300}}\ ,\ 0{,}28 + 1,96\sqrt{\frac{0{,}28(1-0{,}28)}{300}})\right] \approx [0{,}229\ ;\ 0{,}331]$$

Les bornes de l'intervalle sont arrondies à 10^{-3}

b. Les médecins d'une ville de ce pays s'interrogent sur la proportion d'adultes souffrant d'hypercholestérolémie LDL dans leur ville. Ils disposent d'un groupe de 300 adultes pris au hasard parmi les adultes de la ville. Ils constatent que 96 d'entre eux souffrent d'hypercholestérolémie LDL.

La fréquence d'adultes souffrant d''hypercholestérolémie LDL dans leur ville est $\dfrac{96}{300} = 0{,}32$

En utilisant l'intervalle de fluctuation précédent, nous pouvons dire, que la proportion d'adultes souffrant d'hypercholestérolémie LDL dans cette ville est dans l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % calculé ci-dessus. La proportion n'est donc pas supérieure à celle de l'ensemble du pays.

3. Deux laboratoires fabriquent un médicament anti-cholestérol LDL.

Le médicament du laboratoire A est testé sur un échantillon de 1 000 adultes et s'avère efficace pour 870 d'entre eux.

Le médicament du laboratoire B est testé sur un échantillon de 800 adultes et s'avère efficace pour 720 d'entre eux.

a. Un intervalle de confiance à 95 % de la proportion p_A d'adultes pour lesquels le médicament du laboratoire A est efficace, est $[0{,}849 ; 0{,}891]$.
Un intervalle de confiance à 95 % de la proportion p_B d'adultes pour lesquels le médicament du laboratoire B est efficace est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$\left[0{,}9-1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}9(1-0{,}9)}{720}}\ ;\ 0{,}9+1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}9(1-0{,}9)}{720}}\right]\approx[0{,}881\ ;\ 0{,}919]$$

b. Ces résultats ne permettent pas de considérer qu'il y a une différence significative entre ces deux médicaments en termes d'efficacité puisque l'intersection des intervalles de confiance est non vide.

EXERCICE 2 — 5 points

Pierre possède une piscine naturelle de 80 000 litres d'eau. Des plantes épuratives jouent le rôle de filtration naturelle. Afin d'améliorer l'oxygénation de l'eau, Pierre décide de recycler en permanence une partie de l'eau de la piscine en la remplaçant par l'eau d'un puits voisin. Malheureusement, Pierre ne sait pas que l'eau du puits, captée par une pompe, est contaminée par des germes.
Avant la mise en route de la pompe, l'eau de la piscine n'est contaminée par aucun germe. La quantité d'eau contaminée au cours du temps est modélisée par une fonction f. Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis la mise en route de la pompe, $f(t)$ représente la quantité, en litres, d'eau contaminée venant du puits au bout de t heures de pompage.
On admet que la fonction f, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0{,}00625y = 30. \qquad \text{(E)}$$

1. **a.** Résolvons l'équation différentielle (E).
Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.
$a = 0{,}00625$ $b = 30$ par conséquent $f(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}00625t} + \dfrac{30}{0{,}00625}$ c'est-à-dire
$f(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}00625t} + 4800$ où C est une constante quelconque.
b. Déterminons la solution de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.
$f(0) = C\mathrm{e}^{0} + 4800 = 0$ d'où $C = -4800$ par conséquent $f(t) = -4800\mathrm{e}^{-0{,}00625t} + 4800$.
La solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$ est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 4800\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}00625t}\right)$.

Dans les questions suivantes, on admet que pour tout réel t de $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f(t) = 4800 - 4800\mathrm{e}^{-0{,}00625t}.$$

2. Calculons, en litres, la quantité d'eau contaminée venant du puits au bout de 72 heures.
$f(72) = 4800 - 4800\mathrm{e}^{-0{,}00625\times72} \approx 1739{,}38$.
La quantité d'eau contaminée venant du puits au bout de 72 heures est, arrondi à l'unité, $1739\,\ell$.

3. **a.** f' désignant la fonction dérivée de la fonction f,
$f'(t) = -4800 \times \left(-0{,}00625\mathrm{e}^{-(0{,}0625)t}\right) = 30\mathrm{e}^{-0{,}00625t}$.
Pour tout t appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) > 0$ comme produit de termes strictement positifs.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Il en résulte que f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Dressons le tableau de variations de la fonction f

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	+	
Variation de f	0 ↗	4800

(on admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 4800$).

b. Ce sens de variation de la fonction f déterminé est cohérent avec la situation « concrète » étudiée parce que Pierre continue d'alimenter sa piscine avec de l'eau polluée.

4. La piscine devient dangereuse pour la peau lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 6 % du volume d'eau de la piscine.

Cette piscine ne peut pas être dangereuse pour la peau puisque $80000 \times 0,06 = 4800$. Ce résultat correspond à la limite de f quand t tend vers l'infini. Cette quantité maximale ne sera pas atteinte.

5. La piscine devient impropre à la baignade lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 3 % du volume d'eau de la piscine.

Déterminons, à l'heure près, au bout de combien de temps l'eau de la piscine deviendra impropre à la baignade.

Pour ce faire, résolvons $f(t) \geqslant 80000 \times 0,03$

$$\begin{aligned}
4800 - 4800\mathrm{e}^{-0,00625t} &\geqslant 2400\\
4800\mathrm{e}^{-0,00625t} &\leqslant 2400\\
\mathrm{e}^{-0,00625t} &\leqslant \frac{2400}{4800}\\
\mathrm{e}^{-0,00625t} &\leqslant \frac{1}{2}\\
\mathrm{e}^{0,00625t} &\geqslant 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln \mathrm{e}^{0,00625t} &\geqslant \ln 2\\
0,00625t &\geqslant \ln 2\\
t &\geqslant \frac{\ln 2}{0,00625}\\
t &\geqslant 160 \ln 2
\end{aligned}$$

Au bout de $160 \ln 2$ heures soit, à une heure près, environ 111 heures, l'eau de la piscine deviendra impropre à la baignade.

EXERCICE 3 — 5 points

En 2013, la production française de déchets d'équipements électriques et électroniques (déchets EEE) s'élève à 1,55 million de tonnes. (*Source : Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie*)

1. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

L'affirmation : « En 2013, la production française de déchets EEE par seconde est de 49 kg, au kilogramme près. » est vraie car en une année non bissextile, il y a $365 \times 24 \times 3600$ secondes et $\dfrac{1,55 \times 10^9}{31536000} \approx 49,150$

On s'intéresse à la production française, exprimée en millions de tonnes, de déchets EEE par an à partir de 2013. On estime qu'à compter de l'année 2013, la production française de déchets EEE augmente de 3 % par an. Ainsi, la situation peut être modélisée par une suite géométrique (u_n), où pour tout entier naturel n, u_n est une estimation de la production française de déchets EEE (exprimée en millions de tonnes) en $2013 + n$.

2. **a.** À un taux d'évolution de 0,03 correspond un coefficient multiplicateur de 1,03. Chaque terme se déduisant du précédent en le multipliant par un même nombre, la raison de la suite géométrique est alors 1,03. Puisque pour tout n, u_n est exprimé en million de tonnes, $u_0 = 1,55$.

b. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est : $u_n = u_0 q^n$.

$u_n = 1,55 \times (1,03)^n$ pour tout entier naturel n.

3. Calculons la production française de déchets EEE en 2020. En 2020, $n = 7$, $u_7 = 1{,}55 \times (1{,}03)^7 \approx 1{,}906\,30$.

La production française de déchets EEE en 2020 sera à 0,01 million de tonnes près, d'environ 1,91 millions de tonnes.

4. Déterminons en quelle année la production française de déchets EEE dépassera 2 millions de tonnes. Pour ce faire,résolvons $u_n \geqslant 2$.

$$1{,}55 \times 1{,}03^n \geqslant 2 \qquad 1{,}03^n \geqslant \frac{40}{31} \qquad n\ln(1{,}03) \geqslant \ln\left(\frac{40}{31}\right)$$

$$1{,}03^n \geqslant \frac{2}{1{,}55} \qquad \ln 1{,}03^n \geqslant \ln\left(\frac{40}{31}\right) \qquad n \geqslant \frac{\ln 40 - \ln 31}{\ln 1{,}03}$$

$\dfrac{\ln 40 - \ln 31}{\ln 1{,}03} \approx 8{,}62$ par conséquent $n \geqslant 9$.

À partir de 2022, la production française de déchets EEE dépassera 2 millions de tonnes.

5. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :
n entier naturel
u et S réels
Initialisation :
Affecter à u la valeur 1,55
Affecter à S la valeur 1,55
Traitement :
Pour n allant de 1 à 5
Affecter à u la valeur 1,03 × u
Affecter à S la valeur S + u
Fin Pour
Sortie :
Afficher S
```

a. Complétons le tableau par les valeurs successives prises par les variables u et S lors du déroulement de l'algorithme (les résultats sont arrondis à 10^{-3}) :

n	0	1	2	3	4	5
u	1,55	1,597	1,644	1,694	1,745	1,797
S	1,55	3,147	4,791	6,485	8,230	10,027

b. Le résultat affiché à l'issue de cet algorithme est 10,027. Cette valeur correspondrait au total de la production française de déchets EEE de 2013 et 2018 inclus.

EXERCICE 4 — 6 points

Une étude vise à quantifier la probabilité y_i, pour une personne donnée, de développer une maladie après la consommation d'une portion de repas à base d' œuf ou de poulet selon le nombre n_i de bactéries *Salmonella* qui y sont présentes.
Les résultats de cette étude sont donnés dans le tableau suivant :

n_i	15	50	400	6 300	$2{,}5 \cdot 10^4$	$6{,}3 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^8$	$6{,}3 \cdot 10^9$
$x_i = \log(n_i)$	1,2	1,7							
y_i	0,02	0,15	0,27	0,63	0,71	0,84	0,92	1	1

(Source : *Organisation des Nations Unies pour l'alimentation et l'agriculture*)

On rappelle que log désigne le logarithme décimal.

1. a. On pose $x_i = \log(n_i)$. Le tableau de valeurs est complété sur celui fourni en annexe 1 (on arrondira les résultats au dixième).

b. Calculons les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Les coordonnées de G sont $(\overline{x}\,;\,\overline{y})$

$$\overline{x_G} = \frac{1,2+1,7+\cdots+8,6+9,8}{9} \approx 4{,}9 \quad \overline{y_G} = \frac{0{,}02+0{,}15+\cdots+1+1}{9} \approx 0{,}6$$

G (4,9 ; 0,6) est placé sur le graphique de l'annexe 2.

2. On note (D) la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

a. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement D par la méthode des moindres carrés est $y = 0{,}117x + 0{,}039$ (a et b sont arrondis au millième).

b. la droite D est tracée sur le graphique de l'annexe 2 .

c. En utilisant ce modèle d'ajustement, estimons, à 10^{-2} près, la probabilité de développer une maladie après la consommation d'une portion de repas à base d'œuf ou de poulet dans lesquels le nombre de bactéries *Salmonella* est de 4 000.

Calculons d'abord $x = \log 4\,000$. $x \approx 3{,}6$. En reportant ce nombre dans l'équation de la droite

$y = 0{,}117 \times 3{,}6 + 0{,}039 = 0{,}46$;

Cette estimation est d'environ 0,46.

3. Dans cette question, on utilise un nouveau modèle d'ajustement.

Pour un nombre n de bactéries donné, on pose $x = \log n$ et, dans ce nouveau modèle, on note $f(x)$ la probabilité, pour une personne donnée, de développer une maladie après la consommation d'une portion de repas à base d'œuf ou de poulet selon le nombre n de bactéries *Salmonella* qui y sont présentes.

On suppose que pour tout $x \in [0~;~+\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{1+34{,}8\mathrm{e}^{-x}}.$$

a. On détermine la fonction dérivée de la fonction f grâce à un logiciel de calcul formel. On a obtenu l'affichage suivant :

1	f(x) :=1/ (1+34.8*e^(-x))
	$x \to \dfrac{1}{1+34.8*\exp(-x)}$
2	deriver (f(x))
	$34.8 * \dfrac{\exp(-x)}{(34.8*\exp(-x)+1)^2}$

Pour tout x appartenant à $[0~;~+\infty[$, $f'(x) > 0$ comme produit et quotient de termes strictement positifs.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Il en résulte que f est strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.

b. La courbe représentative de la fonction f est tracée dans le repère de l'annexe 2.

c. En utilisant ce nouveau modèle, la probabilité de développer une maladie après la consommation d'une portion de repas à base d'œuf ou de poulet dans lesquels le nombre de bactéries *Salmonella* est de 4 000 est $f(3{,}6)$. $f(3{,}6) \approx 0{,}512\,6$.

La probabilité, arrondie au centième, est 0,51.

d. En utilisant ce nouveau modèle, estimons le nombre de bactéries *Salmonella* d'une portion de repas à base d'œuf ou de poulet telle que la probabilité d'être malade soit égale à 0,75.

Pour ce faire , résolvons $f(x) = 0{,}75$

$$\frac{1}{1+34{,}8\mathrm{e}^{-x}} = 0{,}75 \qquad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{3\times 34{,}8}$$

$$1+34{,}8\mathrm{e}^{-x} = \frac{4}{3} \qquad \mathrm{e}^{x} = 3\times 34{,}8 = 104{,}4$$

$$34{,}8\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{3} \qquad \ln \mathrm{e}^{x} = \ln 104{,}4$$

$x = \ln 104,4$
$n = 10^{\ln 104,4}$
$n \approx 44\,487$

Le nombre de bactéries pour lequel la probabilité est 0,75 est arrondi à l'unité 44 487.

ANNEXES À JOINDRE A LA COPIE

Annexe 1 (exercice 4)

n_i	15	50	400	6 300	$2,5\cdot 10^4$	$6,3\cdot 10^5$	$2\cdot 10^6$	$4\cdot 10^8$	$6,3\cdot 10^9$
$x_i = \log(n_i)$	1,2	1,7	2,6	3,8	4,4	5,8	6,4	8,6	9,8
y_i	0,02	0,15	0,27	0,63	0,71	0,84	0,92	1	1

Annexe 2 (exercice 4)