Corrigé du baccalauréat STL Biochimie Métropole juin 2006

EXERCICE 1 **9 points**

1. **a.** À partir du deuxième, chaque niveau est égal au précédent augmenté de 3 : les six niveaux sonores donnés dans la première colonne du tableau ci-dessus sont en progression arithmétique de raison 3.

   b. On arrive à x_{13} après 12 ajouts du nombre 3, donc $x_{13} = 85 + 12 \times 3 = 85 + 36 = 121$.

2. **a.** À partir de la deuxième chaque durée maximale est égale à la précédente multipliée par $0,5$ (ou divisée par 2) : les 6 premières durée sont en progression géométrique de raison $0,5 = \dfrac{1}{2}$.

   b. On a de même : $y_{13} = y_1 \times 0,5^{12} \approx 0,001\,953$ h soit $0,001\,953 \times 3\,600 \approx 7$ secondes.

3. **a.**

Niveau sonore x_i	85	88	91	94	97	100
$z_i = \ln(y_i)$	2,079	1,386	0,693	0	$-0,693$	$-1,386$

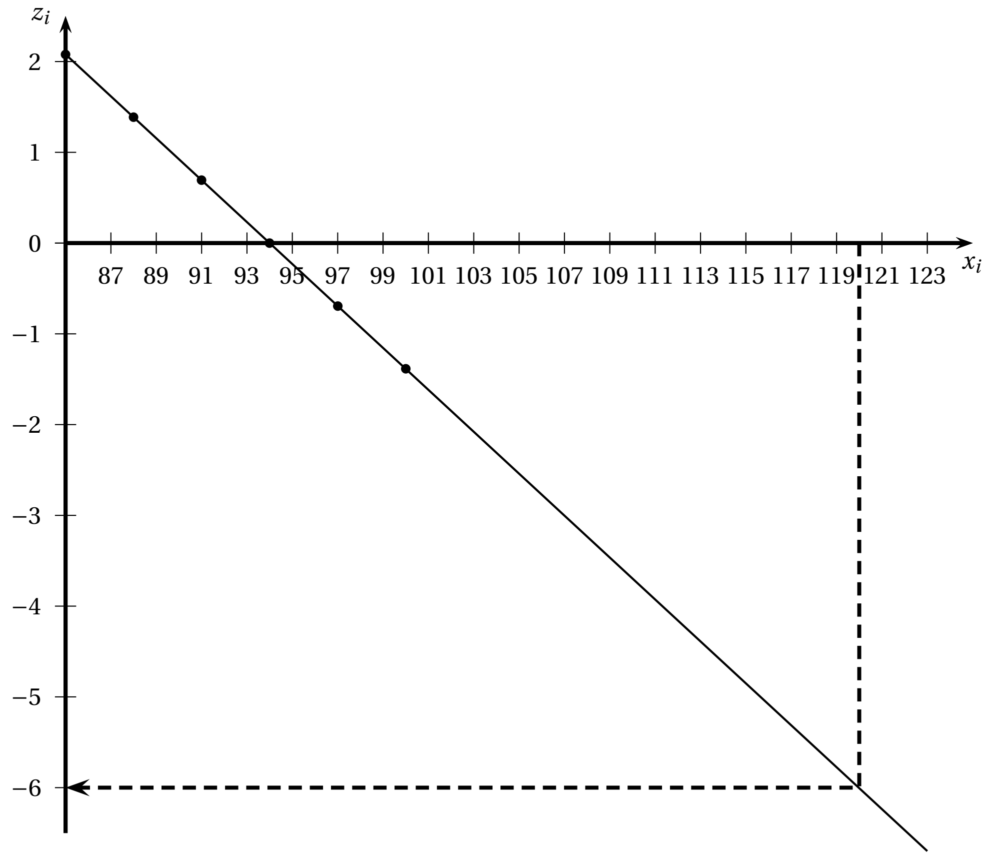
   b. Voir à la fin.

   c. On écrit que les coordonnées des points A et B vérifient l'équation
   $z = ax + b$ soit :
   $\left\{\begin{array}{lcl} 2,079 & = & 85a + b \\ 0 & = & 094a + b \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ (par différence) $-2,079 = 9a \iff a = -0,231$ et comme $b = -94a = -94 \times (-0,231) = 21,714$.

   Une équation de la droite $\mathscr{D}$ est donc $z = -0,231x + 21,714$.

4. **a.** Avec $x = 120$, on obtient grâce à l'équation $z = -0,231 \times 120 + 21,714 = -6,006 = \ln y$, d'où $y = \text{e}^{6,006} \approx 0,002\,464$ h soit environ $0,002\,464 \times 3\,600 \approx 9$ secondes.

   b. On trace la droite d'équation $x = 120$ qui coupe la droite $\mathscr{D}$ en un point dont on trouve l'ordonnée en le projetant sur l'axe des ordonnées. On lit environ -6. Le calcul donne ensuite $y \approx 9$ secondes.



EXERCICE 2 **11 points**

1. **a.** On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{e}^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \text{e}^{-2t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 0$

   b. Le résultat précédent montre que l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

2. **a.** C est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $C'\,t) = 8\left(-\text{e}^{-t} + 2\text{e}^{-2t}\right) = 8\left(-\text{e}^{-2t}\text{e}^{t} + 2\text{e}^{-2t}\right) = 8\text{e}^{-2t}\left(-\text{e}^{t} + 2\right)$.

   b. $C'(t) = 0 \iff 8\text{e}^{-2t}\left(-\text{e}^{t} + 2\right) = 0 \iff -\text{e}^{t} + 2 = 0$ (car $8\text{e}^{-2t} \neq 0$ quel que soit le réel t) $\iff 2 = \text{e}^{t} \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\ln 2 = t$. La dérivée s'annule en $\ln 2$.

   c. On résout de même $C'(t) > 0 \iff 8\text{e}^{-2t}\left(-\text{e}^{t} + 2\right) > 0 \iff -\text{e}^{t} + 2 > 0$ (car $8\text{e}^{-2t} > 0$ quel que soit le réel t) $\iff 2 > \text{e}^{t} \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\ln 2 > t$.

   La dérivée est positive sur l'intervalle $[0~;~\ln 2[$: la fonction est croissante sur cet intervalle et par un calcul analogue la fonction est décroissante sur $[\ln 2~;~+\infty[$.

   d. La fonction a donc un maximum $C(\ln 2) = 8\left(\text{e}^{-\ln 2} - \text{e}^{-2\ln 2}\right) =$
   $8\left(\dfrac{1}{\text{e}^{\ln 2}} - \dfrac{1}{\text{e}^{2\ln 2}}\right) = 8\left(\dfrac{1}{\text{e}^{\ln 2}} - \dfrac{1}{\text{e}^{\ln 2^2}}\right) = 8\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) = 8\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2.$
   D'où le tableau de variations :

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

3. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est
$y = C(0) + C'(0)(x - 0)$.
$C(0) = 0$ et $C'(0) = 8\text{e}^{-2\times 0}\left(-\text{e}^{0} + 2\right) = 8(-1+2) = 8$.
Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = 8x$.

4.

t (en heures)	0	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5
$C(t)$	0	1,38	1,91	1,86	1,39	0,94	0,60	0,38	0,14	0,05

5. **a.** On peut utiliser les deux points de T de coordonnées $(0\,;\,0)$ et $(0{,}25\,;\,2)$.

b. Voir à la fin.

6. On trace la droite d'équation $y = 1$ qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points dont on trouve les abscisses en les projetant sur l'axe des abscisses. On lit à peu près : $x \approx 1{,}9$ h soit à peu près 1 h 54 minutes pour le deuxième point d'intersection.