∾ Corrigé du baccalauréat STL Biochimie-Génie biologique ∾
Métropole septembre 2006

Calculatrice autorisée

Durée de l'épreuve : 2 heures | Coefficient : 2

EXERCICE 1 **10 points**

Les deux parties sont indépendantes

Partie A

1.

t	0	2	4	6	8	10
$N(t)$	12 000	8 000	5 400	3 600	2 500	1 650
$N'(t)$	-2400	-1600	-1070	-730	-480	-340
$\dfrac{N'(t)}{N(t)}$	$-0,2$	$-0,2$	$-0,212$	$-0,203$	$-0,192$	$-0,206$

La moyenne arithmétique de ces quotients est :
$\dfrac{-0,2-0,2+\ldots-0,206}{6} \approx -0,202$.

2. On sait que les solutions de l'équation différentielles sont les fonctions de la forme :
$N(t) = A\mathrm{e}^{-0,2t}$ avec $A \in \mathbb{R}$.
$N(0) = 12000 \iff A\mathrm{e}^{-0,2\times 0} = 12000 \iff A = 12000$.
Donc $N(t) = 12000\mathrm{e}^{-0,2t}$.

3. On a au bout de 15 minutes :
$N(15) = 12000\mathrm{e}^{-0,2\times 15} \approx 597$ (bactéries).

Partie B

1.

t_i	0	2	4	6	8	10
$y_i = \ln(N(t_i))$	9,39	8,99	8,59	8,19	7,82	7,41

2. Représenter graphiquement le nuage de points correspondant $M_i\left(t_i\ ;\ y_i\right)$ (unités : 1 cm pour 1 minute en abscisse et 1 cm pour 1 unité en ordonnée).

3. **a.** On trouve G(2 ; 8,99) et G′(8 ; 7,81)

b. Voir plus bas.

c. Si l'équation est $y = at + b$, les nombres a et b vérifient le système :
$\left\{\begin{array}{lcl} 8,99 & = & 2a+b \\ 7,81 & = & 8a+b \end{array}\right. \Rightarrow$ (par différence) $6a = -1,18 \iff a \approx -0,1963$.
Ensuite $b = 8,99 - 2a \approx 8,99 + 2\times 0,1963 \approx 9,383$.
Une équation de la droite (GG′) est donc $y = 9,38 - 0,20t$ (coefficients arrondis au centième).

4. **a.** On a donc $\ln N(t) = 9,38 - 0,20t$ soit en prenant l'exponentielle des deux membres :
$N(t) = \mathrm{e}^{9,38-0,20t} = \mathrm{e}^{9,38} \times \mathrm{e}^{-0,2t}$.
La calculatrice donne $\mathrm{e}^{9,38} \approx 11849$.
Finalement : $N(t) = 11849\mathrm{e}^{-0,2t}$

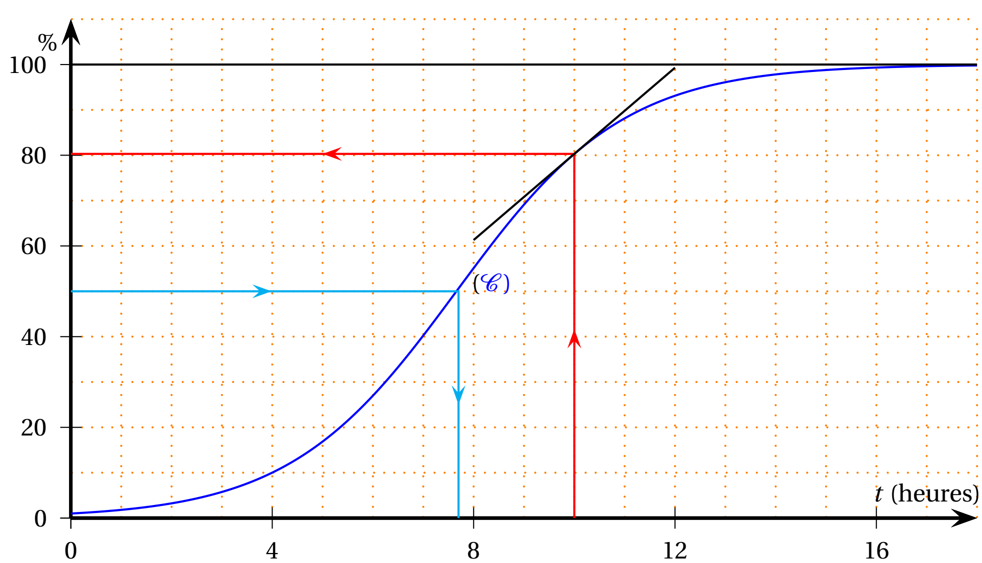
b. Avec ce modèle, on trouve $N(15) = 11849\mathrm{e}^{-0,2\times 15} = 11849\mathrm{e}^{-3} \approx 590$. On trouve sensiblement le même résultat que dans la partie A.

EXERCICE 2 **10 points**

Vers 1840, Verhulst propose un modèle d'évolution d'une population de bactéries en culture. Il suppose que la population ne peut dépasser une certaine valeur maximale.
On note $f(t)$ le pourcentage de cette valeur maximale à l'instant t. On suppose que $f(0) = 1$ et, pour une certaine population, on obtient que

$$f(t) = \frac{100}{1+99\mathrm{e}^{-0,6t}},$$

où t est exprimé en heures.
La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f.



Partie A : Les questions sont résolues par lecture graphique.

1. Graphiquement on lit à peu près 80 %.
2. On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,6t} = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 100$.
3. On lit environ 7,7 h.
4. On voit sur le graphique que $f(t) > 0$ quel que soit $t \geqslant 0$.
5. Pour comparer les vitesses il faut comparer les nombres dérivés $N'(2)$ et $N'(10)$.
   Graphiquement le nombre dérivé $f'(2)$ est inférieur à $f'(10)$. La croissance sera donc supérieure au bout de 10 heures.

Partie B : Les questions sont résolues par le calcul.

1. On calcule $f(10) = \dfrac{100}{1+99\mathrm{e}^{-0,6\times 10}} = \dfrac{100}{1+99\mathrm{e}^{-6}} \approx 80,3\,\%$.
2. On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,6t} = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 100$.
3. Il faut résoudre l'équation :
   $50 = \dfrac{100}{1+99\mathrm{e}^{-0,6t}} \iff 1 = \dfrac{2}{1+99\mathrm{e}^{-0,6t}} \iff 2 = 1+99\mathrm{e}^{-0,6t} \iff 1 = 99\mathrm{e}^{-0,6t} \iff \dfrac{1}{99} = \mathrm{e}^{-0,6t}$
   soit en prenant le logarithme népérien :
   $\ln\left(\frac{1}{99}\right) = -0,6t \iff t = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{99}\right)}{-0,6}$;
   on obtient $t \approx 7,659$ soit 7,7 h au dixième près.
4. f est un quotient de fonctions dérivables dont est dérivable sur $\mathbb{R}$:
   $f'(t) = -(-0,6\times 99)\dfrac{100\mathrm{e}^{-0,6t}}{\left(1+99\mathrm{e}^{-0,6t}\right)^2} = \frac{5\,940\mathrm{e}^{-0,6t}}{\left(1+99\mathrm{e}^{-0,6t}\right)^2}$.
   Tous les termes de ce quotient sont positifs donc $f'(t) > 0$: la fonction f est croissante sur $[0~;~+\infty[$.
5. Une équation de la tangente est $y - f(10) = f'(10)(x-10)$
   - $f(10) = \dfrac{100}{1+99\mathrm{e}^{-0,6\times 10}} = \dfrac{100}{1+99\mathrm{e}^{-6}} \approx 80,3$.
   - $f'(10) = \frac{5\,940\mathrm{e}^{-0,6\times 10}}{\left(1+99\mathrm{e}^{-0,6\times 10}\right)^2} = \frac{5\,940\mathrm{e}^{-6}}{\left(1+99\mathrm{e}^{-6}\right)^2} \approx 9,5$.

   Une équation de la tangente est donc $y - 80,3 = 9,5(x-10)$ ou $y - 80,3 = 9,5x - 95$, soit finalement :
   $y = 9,5x - 14,7$.