Corrigé du baccalauréat STL Métropole Biotechnologies 12 septembre 2013

EXERCICE 1 **5 points**

Monsieur Durand est embauché le 1[er] janvier 2012. Son salaire mensuel est de 1 300 euros en 2012, puis il augmentera de 1,7 % chaque année.
Madame Martin est embauchée à la même date. Son salaire mensuel est de 1 150 euros en 2012, puis il augmentera de 2,3 % chaque année.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le salaire mensuel de Monsieur Durand au cours de l'année $2012 + n$ et b_n celui de Madame Martin au cours de l'année $2012 + n$.

1. **a.** Exprimons a_{n+1} en fonction de a_n.
À un taux d'évolution de 1,7 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,017, par conséquent

$$a_{n+1} = 1,017a_n.$$

Il en résulte que la suite (a_n) est une suite géométrique de premier terme 1 300 et de raison 1,017.

b. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0q^n$ donc,

$$a_n = 1300 \times (1,017)^n.$$

2. De la même manière, nous montrerions que $b_n = 1150 \times 1,023^n$.

3. Pour répondre à une question concernant le salaire de Monsieur Durand, un élève propose l'algorithme ci-dessous :

```
B prend la valeur 1 300
N prend la valeur 0
Tant que B ⩽ 1400
    Remplacer N par N + 1
    Remplacer B par B × 1,017
Fin Tant que
Afficher N + 2012
```

a. En faisant fonctionner cet algorithme, nous obtenons comme valeur affichée 2017.

b. La valeur affichée par cet algorithme est l'année durant laquelle le salaire mensuel de Monsieur Durand dépassera 1 400 euros.

4. **a.** Écrivons un algorithme permettant de déterminer l'année où le salaire mensuel de Madame Martin dépassera 1 500 euros.

```
B prend la valeur 1 150
N prend la valeur 0
Tant que B ⩽ 1500
    Remplacer N par N + 1
    Remplacer B par B × 1,023
Fin Tant que
Afficher N + 2012
```

b. Le salaire mensuel de Madame Martin dépassera 1 500 euros à partir de 2024.

5. Pour déterminer à partir de quelle année le salaire mensuel de Madame Martin dépassera celui de Monsieur Durand, résolvons $1150 \times 1,023^n > 1300 \times 1,017^n$.

$$1\,150 \times 1{,}023^n > 1\,300 \times 1{,}017^n$$
$$\ln\left(1\,150 \times 1{,}023^n\right) > \ln\left(1\,300 \times 1{,}017^n\right) \text{ par croissance de la fonction ln}$$
$$\ln 1\,150 + \ln 1{,}023^n > \ln 1\,300 + \ln 1{,}017^n$$
$$\ln 1{,}023^n - \ln 1{,}017^n > \ln 1\,300 - \ln 1\,150$$
$$n\,(\ln 1{,}023 - \ln 1{,}017) > (\ln 1300 - \ln 1\,150)$$
$$n > \frac{\ln 1\,300 - \ln 1\,150}{\ln 1{,}023 - \ln 1{,}017}$$
$$\frac{\ln 1\,300 - \ln 1\,150}{\ln 1{,}023 - \ln 1{,}017} \approx 20{,}84 \qquad n > 20{,}84$$

Le salaire mensuel de Madame Martin dépassera celui de Monsieur Durand en 2033.

EXERCICE 2 — 7 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Le tableau suivant donne la tension artérielle (systolique) moyenne y_i d'une population d'hommes à différents âges x_i :

Âge x_i en années	25	40	50	60	70
Tension artérielle moyenne y_i en mm de mercure	118,2	124,3	131,9	136,5	142,5

1. Le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ est représenté dans un repère orthogonal. L'axe des ordonnées est gradué à partir de 100 et il a été pris pour unités : 2 cm pour 10 ans sur l'axe des abscisses ; 2 cm pour 10 mm de mercure sur l'axe des ordonnées.

2. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite D d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 0{,}549\,5x + 103{,}754\,1$ (les coefficients sont donnés à 10^{-4} près).

Pour la suite de l'exercice, on prendra pour équation de la droite D : $y = 0,55x + 103,75$.

3. La droite D est tracée sur le graphique précédent.

4. Avec ce modèle d'ajustement, une estimation graphique, de la tension artérielle moyenne d'un homme de 75 ans est d'environ 145 mm de mercure. Par le calcul, nous aurions obtenu aussi 145 mm de mercure :

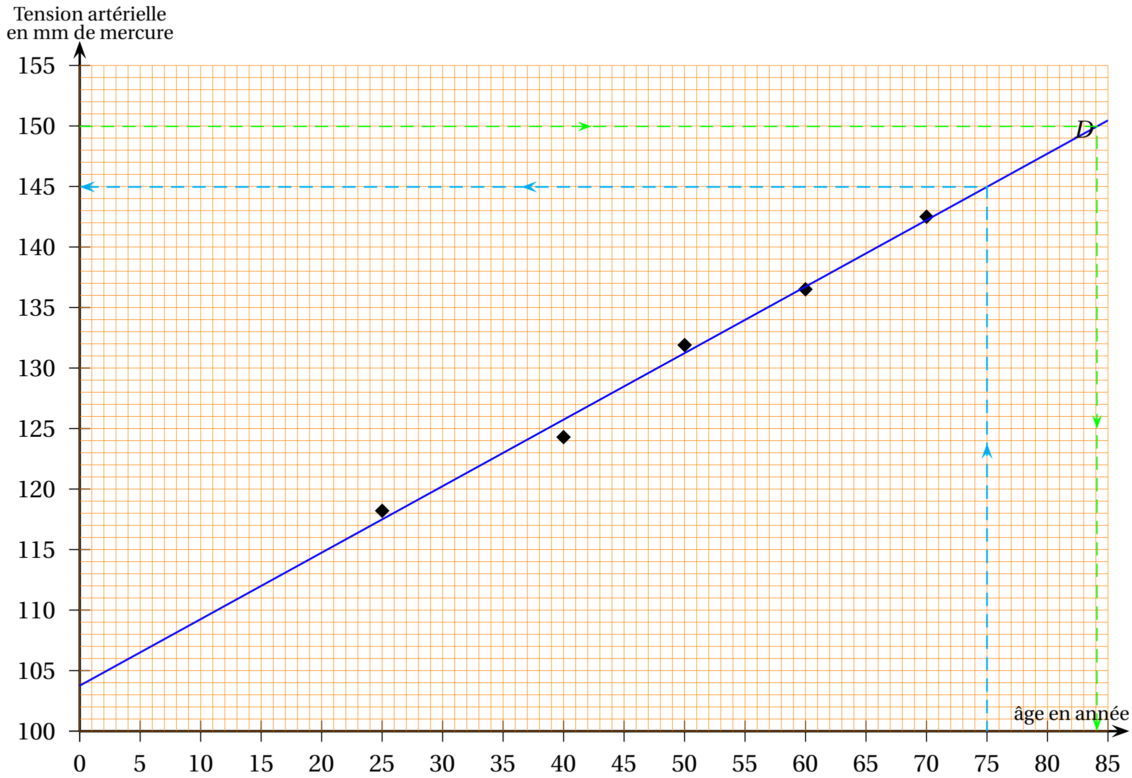
   $(0{,}55 \times 75 + 103,75 = 145)$

5. Avec ce modèle d'ajustement, déterminons algébriquement à partir de quel âge un homme a une tension artérielle moyenne supérieure à 150.

   Pour ce faire, résolvons $0{,}55 \times x + 103,75 = 150$.

   Nous obtenons $x = \dfrac{150 - 103,75}{0{,}55}$ $\quad x \approx 84{,}1$.

   L'âge moyen des hommes ayant une tension artérielle de 150 mm est, selon ce modèle, d'environ 84 ans.



Partie B

Dans la population étudiée en partie A, 30 % des hommes souffrent d'hypertension artérielle.

1. On considère 200 hommes pris au hasard dans cette population et on mesure leur tension artérielle moyenne. La population est suffisamment importante pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'hommes souffrant d'hypertension. La loi de probabilité de X est une loi binomiale car il s'agit de la répétition de n séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues de probabilité p et q telles que $p+q=1$.

L'issue réalisant la réussite est : « l'homme souffre d'hypertension artérielle ». Le nombre n de prélèvements est 200 et la probabilité qu'il souffre d'hypertension est 0,30.

Nous avons donc une loi binomiale de paramètres (200 ; 0,3).

2. On décide d'approcher la variable aléatoire donnant le nombre des hommes souffrant d'hypertension artérielle dans le prélèvement par la variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 60 et d'écart type 6, 5.

Déterminons la probabilité, arrondie à 10^{-2} près, que dans ce groupe de 200 hommes :

a. entre 47 et 73 individus souffrent d'hypertension ;
$P(47 \leqslant Y \leqslant 73) = P\left(\mu - 2\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + 2\sigma\right) = 0{,}95$.

b. plus de 73 individus souffrent d'hypertension. $P(Y \geqslant 73) = P\left(Y \geqslant \mu + 2\sigma\right) = \dfrac{0{,}05}{2} =$ 0,025 c'est-à-dire 0,03 à 10^{-2} près.

3. Un médecin constate que, parmi 100 hommes en surpoids choisis au hasard dans cette population, 42 souffrent d'hypertension.

Peut-il considérer que cette proportion d'hommes hypertendus est conforme à celle de la population masculine étudiée ? Justifier la réponse.

Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'hommes atteints d'hypertension dans cet échantillon de 200 personnes.

Si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$, $n(1-p) \geqslant 5$ nous pouvons approximer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 par l'intervalle :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Nous avons $n = 200$, $np = 200 \times 0,3 = 60$, $200 \times (1-0,3) = 140$. Les conditions étant remplies, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 est

$$\left[0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{200}}\ ;\ 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{200}}\right] = [0,24\ ;\ 0,36]$$

les bornes de l'intervalle sont arrondies à 10^{-2} près.

La proportion d'hommes atteints d'hypertension dans cet échantillon est $\frac{42}{100}$. Cette valeur n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation, elle n'est donc pas conforme à celle de la population étudiée.

EXERCICE 3 **8 points**

La conservation d'une variété de fruits nécessite de les placer, après la récolte et avant le stockage, dans un tunnel refroidissant à air pulsé.
On s'intéresse à l'évolution de la température du fruit en fonction du temps.
À l'instant $t = 0$, les fruits, dont la température est de 24 °C, sont placés dans le tunnel où l'air pulsé est à 2 °C.
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ qui à tout instant t, exprimé en heures, associe la température d'un fruit, exprimée en °C.
On admet que f est la solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0,61y = 1,22 \quad \text{vérifiant} \quad f(0) = 24.$$

1. Résolvons l'équation différentielle $y' + 0,61y = 1,22$ où y est une fonction dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(t) = C\mathrm{e}^{-at} + \frac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.

$a = 0,61$ $b = 1,22$ par conséquent $y(t) = C\mathrm{e}^{-0,61t} + \frac{1,22}{0,61} = C\mathrm{e}^{-0,61t} + 2$ où C est une constante quelconque.

2. Déterminons la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant $f(0) = 24$.

$f(0) = C\mathrm{e}^{-0,61\times 0} + 2 = 24$ d'où $C = 24 - 2 = 22$.

Il en résulte que pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $f(t) = 2 + 22\mathrm{e}^{-0,61t}$.

La courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}$, est donnée en annexe.

3. Calculons la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 2 + \lim_{t\to+\infty} 22\mathrm{e}^{-0,61t} = 2 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0.$$

La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe représentative de f.

4. **a.** Déterminons $f'(t)$ où f' est la fonction dérivée de f.
$f'(t) = 0 + 22 \times (-0,61\mathrm{e}^{-0,61t}) = -13,42\mathrm{e}^{-0,61t}$

b. Étudions le signe de $f'(t)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. Pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{-0.61t} > 0$. Par conséquent $f'(t) < 0$ pour tout t appartenant à $\mathbb{R}_+$.

c. Dressons le tableau de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) < 0$, par conséquent f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
Variation de f	24	2

5. Déterminons graphiquement en faisant apparaître les traits de construction utiles :

a. la température d'un fruit au bout de 4 heures ; avec la précision permise par le graphique, nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4 soit environ 3,9 °C.

b. au bout de combien de temps la température d'un fruit aura diminué de moitié par rapport à la température initiale. Nous lisons l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 12, nous trouvons environ 1,3 soit presque une heure et dix-huit minutes.

6. a. La fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = 2t - \dfrac{2\,200}{61}\text{e}^{-0{,}61t}$ est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$ lorsque $F' = f$.
$F'(t) = 2 - \left(\dfrac{2\,200}{61} \times (-0{,}61)\text{e}^{-0{,}61t}\right) = 2 + 22\text{e}^{-0{,}61t} = f(t)$.
F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.

b. $I = \displaystyle\int_0^6 f(t)\,\text{d}t = \left[2t - \dfrac{2\,200}{61}\text{e}^{-0{,}61t}\right]_0^6 = 10 - \dfrac{2\,200}{61}\text{e}^{-0{,}61\times 6} - \left(0 - \dfrac{2\,200}{61}\text{e}^{-0{,}61\times 0}\right) = 10 - \dfrac{2\,200}{61}\text{e}^{-3{,}66} + \dfrac{2\,200}{61}$
$I = 10 - \dfrac{2\,200}{61}\left(\text{e}^{-3{,}66} - 1\right)$ ou $I = \dfrac{2\,810 - 2\,200\text{e}^{-3{,}66}}{61}$.
$I \approx 47{,}14$ à 10^{-2} près.

c. On admet que la température moyenne d'un fruit durant les 6 premières heures est $\dfrac{I}{6}$.
Cette température moyenne au dixième de degré près est $\dfrac{I}{6} = \dfrac{47{,}14}{6} \approx 7{,}9$.

7. On considère que la vitesse de refroidissement est satisfaisante lorsque la température d'un fruit baisse de $\dfrac{7}{8}$ en moins de 6 heures.

La température du fruit devant baisser de $\dfrac{7}{8}$ en moins de 6 heures devrait donc être de 3°C $\left(24 - 24 \times \dfrac{7}{8} = 3\right)$.

La température au terme des 6 heures est $f(6)$. $f(6) = 2 + 22\text{e}^{-0.61\times 6} \approx 2{,}57$.

Nous pouvons considérer que la vitesse de refroidissement est satisfaisante puisque la température est inférieure à 3°C avant les six heures $(2{,}57 < 3)$.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 3

Représentation graphique de la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 2 + 22\mathrm{e}^{-0,61t}$.