∽ Corrigé du baccalauréat STL Biotechnologies ∾ Métropole–La Réunion 11 septembre 2014

EXERCICE 1 **4 points**

Une entreprise fabrique en très grande quantité des gélules vides destinées à l'industrie pharmaceutique. La fabrication est faite à l'aide d'une machine.

On admet que la masse M, en milligrammes, d'une gélule suit une loi normale d'espérance 66 et d'écart type $0,5$.

1. Déterminons la probabilité pour qu'une gélule prise au hasard ait :

   a. une masse comprise entre 65 et 67 mg. À l'aide de la calculatrice, $p(65 \leqslant X \leqslant 67) \approx 0,95$ à 10^{-2} près.

   $[65~;~67] = [\mu - 2\sigma~;~\mu + 2\sigma]$ et nous savons alors que $p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ à 10^{-2} près

   b. une masse inférieure à 65,5 mg. À l'aide de la calculatrice, $p(X \leqslant 65,5) \approx 0,16$ à 10^{-2} près.

   $[65,5~;~66,5] = [\mu - \sigma~;~\mu + \sigma]$ et nous savons alors que $p(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$ à 10^{-2} près ;
   Par conséquent $p(X \leqslant 65,5) = p(X \geqslant 66,5) = \dfrac{1 - 0,68}{2} \approx 0,16$ à 10^{-2} près.

2. Une gélule est considérée comme conforme si sa masse est comprise entre 65 et 67 mg. La probabilité pour qu'une gélule soit considérée comme conforme est égale à 0,95.

   On prélève au hasard un lot de 50 gélules. On suppose que l'effectif est assez important pour pouvoir assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

   On désigne par X le nombre de gélules considérées comme conformes dans ce lot.

   a. La loi de probabilité de X est une loi binomiale car il s'agit d'une répétition de n séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues de probabilité p et q telles que $p + q = 1$.
   L'issue favorable est l'évènement « la gélule est conforme » de probabilité 0,95.
   Le nombre n de prélèvements est 50.
   X suit une loi binomiale de paramètres (50 ; 0,95) par conséquent
   $p(X = k) = \binom{50}{k}(0,95)^k(0,05)^{50-k}$

   b. Déterminons la probabilité que le lot contienne 50 gélules conformes c'est-à-dire $p(X = 50)$.
   $p(X = 50) = 0,95^{50} \approx 0,08$ à 10^{-2} près.

3. On s'intéresse maintenant à la couleur de chaque gélule. On prélève un lot de 1 000 gélules dans la production quotidienne de la machine. Dans cet échantillon, 43 gélules présentent un défaut de teinte.

   Nous avons alors une proportion p valant $\dfrac{43}{1\,000}$ soit 0,043.

   Déterminons l'intervalle de confiance à 95 % de la proportion de gélules présentant un défaut de teinte.

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}~;~p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$\left[0,043 - 1,96\sqrt{\frac{0,043(1-0,043)}{1\,000}}~;~0,043 + 1,96\sqrt{\frac{0,043(1-0,043)}{1\,000}}\right] \approx [0,0304~;~0,0555]$$

EXERCICE 2 **4 points**

1. Dans une expérience de laboratoire, sous certaines conditions, une population de bactéries double toutes les heures.

   Initialement, on compte 1 000 bactéries. On souhaite déterminer l'heure où il y en aura dix fois plus.

   a. Parmi les trois algorithmes suivants, celui répondant au problème est l'algorithme 3.

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**
N prend la valeur 1 000 H prend la valeur 0 Tant que $N < 10000$ faire N prend la valeur $2 \times N$ Fin Tant que Afficher H	N prend la valeur 1 000 Tant que $N < 10000$ faire N prend la valeur $2 \times N$ Fin Tant que H prend la valeur $H + 1$ Afficher H	N prend la valeur 1 000 H prend la valeur 0 Tant que $N < 10000$ faire H prend la valeur $H + 1$ N prend la valeur $2 \times N$ Fin Tant que Afficher H

   En effet, dans l'algorithme 1, H ne varie pas et dans l'algorithme 2 H n'est pas initialisé.

   b. La valeur affichée par l'algorithme répondant au problème posé est 4.

   Nous aurions pu résoudre $1000 \times 2^n \geqslant 10000$ ou $2^n \geqslant 10$. $2^3 = 8$ et $2^4 = 16$. Nous retrouvons bien le résultat de l'algorithme.

2. Dans une autre expérience, au début il y a 300 anticorps et 500 bactéries. Les anticorps augmentent de 10 % par heure, les bactéries augmentent de 7 % par heure.

   On note a_n et b_n respectivement le nombre d'anticorps et de bactéries à l'heure n.

   Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 500$.

   a. À un taux d'évolution t correspond un coefficient multiplicateur $(1 + t)$ c'est-à-dire pour $t = 10\,\% = 0{,}10$ le coefficient multiplicateur est 1,1. Par conséquent, chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par 1,1. Nous avons donc pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1{,}1 \times a_n$.

   (a_n) est une suite géométrique de raison 1,1 et de premier terme $a_0 = 300$. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times (q)^n$.
   $a_n = 300 \times (1{,}1^n)$.

   b. Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 7 % est 1,07. Nous avons donc pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 1{,}07 \times b_n$. (b_n) est une suite géométrique de raison 1,07 et de premier terme $b_0 = 500$. $b_n = 500 \times (1{,}07^n)$.

   c. Déterminons les entiers naturels n tels que $a_n > b_n$.
   Pour ce faire, résolvons $300 \times (1{,}1)^n > 500 \times (1{,}07)^n$.

$$300 \times (1{,}1)^n > 500 \times (1{,}07)^n$$
$$\frac{1{,}1^n}{1{,}07^n} > \frac{5}{3}$$
$$\left(\frac{1{,}1}{1{,}07}\right)^n > \frac{5}{3}$$
$$\ln\left(\frac{1{,}1}{1{,}07}\right)^n > \ln\frac{5}{3}$$
$$n\ln\left(\frac{1{,}1}{1{,}07}\right) > \ln\frac{5}{3}$$
$$n > \frac{\ln\frac{5}{3}}{\ln\frac{1{,}1}{1{,}07}}$$
$$n > \frac{\ln 5 - \ln 3}{\ln 1{,}1 - \ln 1{,}07}$$

   $\dfrac{\ln 5 - \ln 3}{\ln 1{,}1 - \ln 1{,}07} \approx 18{,}4737$

   L'ensemble solution de l'inéquation $a_n > b_n$ sont les entiers naturels supérieurs à 19.

   19 heures après le début de l'expérience, il y aura plus d'anticorps que de bactéries.

EXERCICE 3 **5 points**

Les deux parties de l'exercice proposent une approche différente de l'étude cinétique d'une réaction catalysée par la β-fructosidase.
La vitesse initiale v de la réaction a été mesurée en présence de différentes concentrations, notées s, de substrats dans des conditions identiques de pH et de température. Les résultats sont les suivants :

Concentration de substrat s_i en mmol.L^{-1}	0,1	0,2	0,3	0,5	1	1,3
Vitesse initiale v_i en μmol par minute	4,5	5,6	6,3	6,9	7,7	8,1

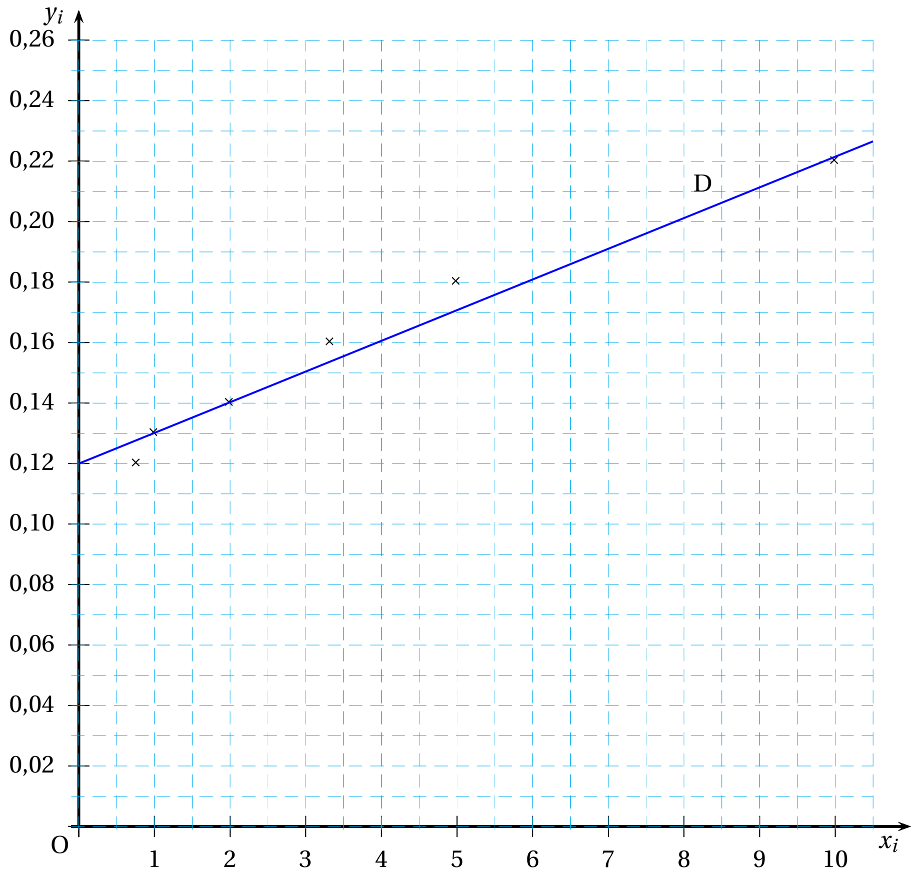
Partie A : Utilisation d'un changement de variable

1. On effectue les changements de variable : $x_i = \dfrac{1}{s_i}$ et $y_i = \dfrac{1}{v_i}$.

x_i	10	5	3,33	2	1	0,77
y_i	0,22	0,18	0,16	0,14	0,13	0,12

a. Complétons le tableau ci-dessus (valeurs arrondies à 10^{-2} près).

b. Le nuage de points $M_i\left(x_i,\ y_i\right)$ est représenté ci-dessous.



On choisira 1 cm pour 1 en abscisse et 1 cm pour 0,02 en ordonnée.

2. a. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement D par la méthode des moindres carrés est $y = 0{,}0105x + 0{,}12$ (le coefficient de x, a, est arrondi à 10^{-4} près et b est arrondi à 10^{-2} près).

b. la droite D est tracée sur le graphique précédent.

3. On admet que la β-fructosidase suit le modèle de Michaelis-Menten et on peut alors écrire :
$\dfrac{1}{v} = \dfrac{K_M}{v_{\max}} \times \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{v_{\max}}$ où $v_{v_{\max}}$ est la vitesse initiale maximale et K_M est la constante de Michaelis spécifique de la β-fructosidase.

On admet que $a = \dfrac{K_M}{v_{\max}}$ et $b = \dfrac{1}{v_{\max}}$ où a et b sont les valeurs obtenues à la question **2. a**.

Nous avons alors : $\dfrac{K_M}{v_{\max}} = 0{,}0105$ c'est-à-dire $K_M = 0{,}0105 \times v_{\max}$ et $\dfrac{1}{v_{\max}} = 0{,}12$ c'est-à-dire $v_{\max} = \dfrac{1}{0{,}12}$.

Par conséquent, $v_{\max} \approx 8{,}33$ à 10^{-2} près, et $K_M = 0{,}0105 \times 8{,}33 = 0{,}0875$ à 10^{-4} près.

Partie B : Utilisation d'une représentation de Michaelis-Menten

Sur l'annexe, on a placé les points $N_i\left(s_i,\ v_i\right)$ relevés expérimentalement et on a tracé la courbe de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(s) = v = \frac{s}{0{,}01 + 0{,}12s} = \frac{1}{\frac{0{,}01}{s} + 0{,}12}.$$

On estime que cette courbe C est un ajustement acceptable des relevés expérimentaux.

1. **a.** Déterminons la limite de v lorsque s tend vers $+\infty$.
$\displaystyle\lim_{s\to+\infty} f(s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{\frac{0{,}01}{s} + 0{,}12} = \frac{1}{0{,}12} \approx 8{,}33$

remarque Nous avons montré que l'inverse de 8,1 était 0,12 or ici nous établissons que l'inverse de 0,12 est 8,33 et non 8,1 problème d'arrondis !

b. La courbe C admet la droite d'équation y=8,33 comme asymptote au voisinage de l'infini.
Elle est tracée sur l'annexe.

c. En admettant que $v_{\max}$ est la limite de v quand s tend vers $+\infty$, $v_{\max} = 8{,}33$.

2. Résolvons graphiquement $f(s) = \dfrac{v_{\max}}{2}$. Nous traçons la droite d"équation y=4,17 et nous lisons l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec cette droite. Nous lisons $\approx 0{,}8$.
Remarque : la solution est appelée la constante de Michaelis K_M.

EXERCICE 4 **7 points**

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0{,}2y = 100$$

où y est une fonction dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Résolvons l'équation différentielle (E).
Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.
$a = 0{,}2$ $b = 100$ par conséquent $y(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}2t} + \dfrac{100}{0{,}2}$ c'est-à-dire $y(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 500$ où C est une constante quelconque.

2. Déterminons la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.
$y(0) = C\mathrm{e}^{0} + 500 = 0$ d'où $C = -500$ par conséquent $y(t) = -500\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 500$.
La solution y de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$ est la fonction y définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $y(t) = 500\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = 500\left(1 - \mathrm{e}^{-0,2t}\right).$$

On désigne par C_1, la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminons $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} (-500\mathrm{e}^{-0,2t} + 500) = 0 + 500 = 500.$

La droite D d'équation $y = 500$ est asymptote à la courbe C_1 au voisinage de l'infini.

2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f sur $[0 ; +\infty[$.

Déterminons la fonction dérivée de f . $f'(t) = -500(-0.2)\mathrm{e}^{-0.2t} + 0$.

Pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f'(t) = 100\mathrm{e}^{-0,2t}$.

b. Pour tout t appartenant à $[0 ; +\infty[$, $f'(t) > 0$ comme produit de termes strictement positifs.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Il en résulte que f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Partie C : exploitation des résultats de la partie B

Lors de l'étude de la progression d'une épidémie sur une population de 2 000 personnes, on a établi que le nombre d'individus contaminés à la date t, exprimée en jours, est donné par :

$$f(t) = 500\left(1 - \mathrm{e}^{-0,2t}\right) \quad \text{pour } t \text{ entre } 0 \text{ et } 30.$$

1. Dénombrons à l'unité près le nombre de personnes contaminées

- après un jour d'épidémie soit $f(1)$. $f(1) = 500\left(1 - \mathrm{e}^{-0,2}\right) \approx 91$.
- après dix jours $f(10)$. $f(10) = 500\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) \approx 432$

2. Le taux d'évolution est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} = \dfrac{432 - 91}{91} \approx 3,74725$.

Le nombre de personnes contaminées entre le premier et le dixième jour de l'épidémie a augmenté de 374,73 %.

3. Le tiers de la population correspondant à un effectif supérieur à 500, limite du nombre de personnes contaminées, ne peut donc pas être contaminé.

4. Au bout de combien de jours, le huitième de la population est-il contaminé ? Pour ce faire, résolvons $f(t) = \dfrac{2000}{8}$.

$500\left(1 - \mathrm{e}^{-0,2t}\right) = 250 \qquad 1 - \mathrm{e}^{-0.2t} = 0.5 \qquad \mathrm{e}^{-0.2t} = 0.5 \qquad \mathrm{e}^{0.2t} = 2 \qquad 0.2t = \ln 2 \qquad t = 5\ln 2 \approx 3,47$.

Au bout de quatre jours, nous pouvons estimer que le huitième de la population a été contaminée.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 3 : Points $N_i\,(s_i,\ n_i)$ et représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(s) = v = \frac{s}{0,01 + 0,12s} \quad \text{où } v \text{ est en } \mu\text{mol par minute et } s \text{ en mmol par litre.}$$