∽ Corrigé du baccalauréat STL Biotechnologies Polynésie ∾ juin 2013

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Le candidat doit traiter les quatre exercices. Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 — 5 points

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au centième.

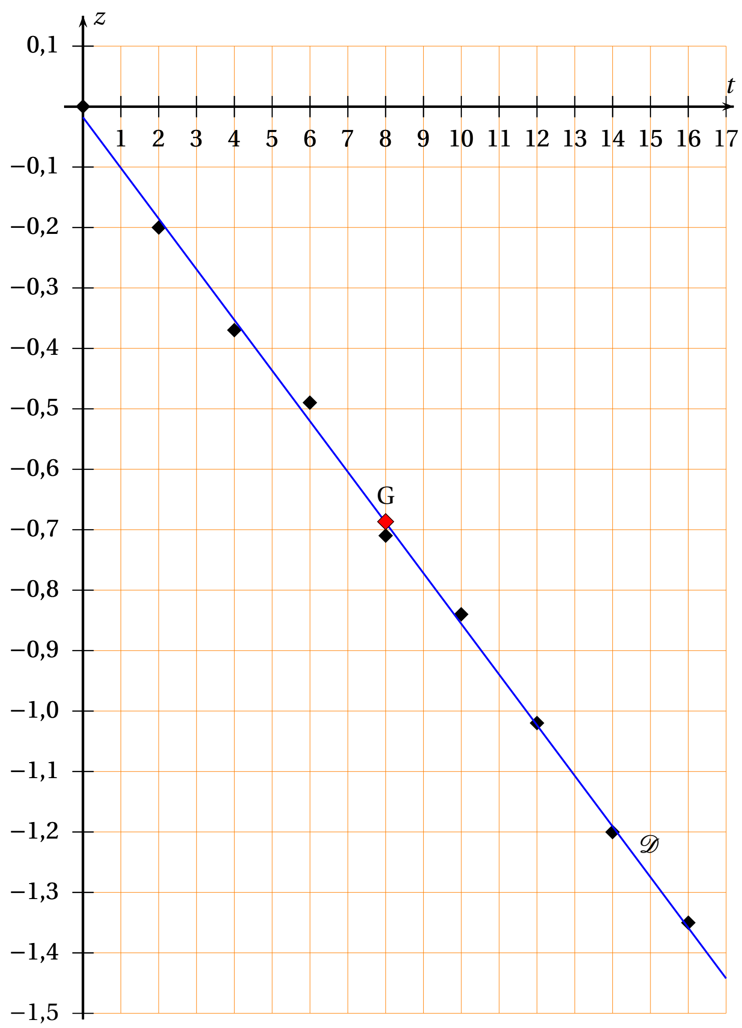
On s'intéresse à la désintégration radioactive de l'iode 131.
On désigne par N_0 le nombre d'atomes d'iode 131 à l'instant 0 et par N le nombre d'atomes d'iode 131 à l'instant t (t étant exprimé en jours).
Les mesures à différents instants de $\frac{N}{N_0}$ ont donné les résultats suivants :

Temps t (en jours)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$\frac{N}{N_0}$	1	0,82	0,69	0,61	0,49	0,43	0,36	0,30	0,26

1. Complétons le tableau suivant :

Temps t (en jours)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$z=\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)$	0	$-0,20$	$-0,37$	$-0,49$	$-0,71$	$-0,84$	$-1,02$	$-1,20$	$-1,35$

2. Représentons le nuage de points de coordonnées (t_i, z_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal.



3. Soit G le point moyen du nuage, calculons les coordonnées de G. Les coordonnées de G sont $(\overline{t}\ ;\ \overline{z})$

$$\overline{t_G} = \dfrac{0+2+\cdots+14+16}{9} = 8 \quad \overline{z_G} = \dfrac{0-0{,}20-0{,}37-\cdots-1{,}35}{9} \approx -0{,}69$$

G $(8\ ;\ -0{,}69)$ est placé sur le graphique précédent.

4. À l'aide de la calculatrice, les coefficients étant arrondis au centième, une équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement de z en t par la méthode des moindres carrés est $z = -0{,}08t - 0{,}02$.

5. $\mathscr{D}$ est tracée dans le repère précédent.

6. Nous savons que $z = \ln \frac{N}{N_0}$ par conséquent $\frac{N}{N_0} = \mathrm{e}^z$ et en remplaçant z par sa valeur nous obtenons :

   pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $\frac{N}{N_0} = \mathrm{e}^{-0{,}08t-0{,}02}$.

7. Calculons le rapport $\frac{N}{N_0}$ au bout de 20 jours. Remplaçons t par 20 dans l'expression précédente.

   $\frac{N}{N_0} = \mathrm{e}^{-0{,}08\times 20-0{,}02} \approx 0{,}20$

8. La quantité initiale a été divisée par 10 lorsque $\frac{N}{N_0} = 0{,}1$. z vaut alors $\ln 0{,}1$. Résolvons $\ln 0{,}1 = -0{,}08t - 0{,}02$.

   $t = \dfrac{\ln 0{,}1 + 0{,}02}{-0{,}08} \approx 28{,}53$.

   Au bout de vingt neuf jours, la quantité initiale aura été divisée par 10.

EXERCICE 2 — 3 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.

Recopier le numéro de chaque question et préciser la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. On considère l'algorithme suivant (N désigne un entier naturel)

Entrée :	*Saisir la valeur de N*
Initialisation :	*Affecter à i la valeur 0*
	Affecter à A la valeur 25
Traitement :	*Tant que i < N*
	Affecter à i la valeur de i + 1
	Affecter à A la valeur de 1,05 × A − 0, 1
	Fin Tant que
Sortie :	*Afficher A*

   Pour $N = 4$, l'arrondi à 10^{-2} du nombre affiché est :

   ~~**a.** 26,15~~ ~~**b.** 28,63~~ **c.** 29,96 ~~**d.** 30,82~~.

2. L'ensemble des solutions dans $]0\ ;\ +\infty[$ de l'inéquation $(1-x)\ln x \leqslant 0$ est :

   ~~**a.** $]0\ ;\ 1]$~~ ~~**b.** $[1\ ;\ +\infty[$~~ ~~**c.** $]0\ ;\ \mathrm{e}]$~~ **d.** $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{2x} - x\right) \mathrm{d}x$.

   a. $I = \dfrac{\mathrm{e}^2-2}{2}$ ~~**b.**~~ $\cancel{I = \dfrac{2-\mathrm{e}^2}{2}}$ ~~**c.**~~ $\cancel{I = \mathrm{e}^2 - 2}$ ~~**d.**~~ $\cancel{I = \mathrm{e}^2 - \dfrac{3}{2}}$.

EXERCICE 3 — 5 points

Dans cet exercice, on appelle « poids de naissance », la masse, exprimée en grammes, d'un nouveau né.

Les résultats seront arrondis au centième pour les probabilités et à l'entier pour les poids de naissance donnés en grammes.

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A

On s'intéresse au poids de naissance (exprimé en grammes) des enfants dans une région donnée. On note X la variable aléatoire qui, à un enfant choisi au hasard dans une maternité, associe son poids de naissance. On admet que X suit la loi normale d'espérance 3 300 et d'écart type 600.

On choisit un enfant au hasard dans cette maternité.

1. Déterminons la probabilité que cet enfant ait un poids de naissance compris entre 2 700 g et 3 900 g.

   Calculons, à l'aide de la calculatrice, $P(2700 \leqslant X \leqslant 3900)$. $P(2700 \leqslant X \leqslant 3900) \approx 0{,}68$.

2. L'entier h tel que $P(3300 - h \leqslant \text{X} \leqslant 3300 + h)$ soit égale à 0,95 à 10^{-2} près, correspond à 2 écarts type donc $h = 1200$.

3. La probabilité que cet enfant ait un poids de naissance inférieur à 2 100 g est

   $P(X \leqslant 2100) \approx 0{,}02$

Partie B

Dans cette partie, on considèrera l'hypotrophie sévère qui concerne les enfants dont le poids de naissance est inférieur ou égal à 2 170 g. On admet que la probabilité qu'un enfant choisi au hasard soit concerné par une hypotrophie sévère est égale à 0,03.

Dans une maternité naissent 100 enfants par mois. Le nombre de naissances dans cette maternité est suffisamment important pour que le choix d'un enfant soit assimilé à un tirage avec remise. On appelle Y la variable aléatoire qui, à un mois donné, associe le nombre d'enfants concernés par une hypotrophie sévère.

1. La loi de probabilité de Y est une loi binomiale car il s'agit d'une répétition de 100 séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues (a une hypotrophie ou non) de probabilité respective 0,03 et $q = 0{,}97$.

   Nous avons donc une loi binomiale de paramètres (100; 0,03) par conséquent $P(X = k) = \binom{100}{k}(0{,}03)^k(0{,}97)^{100-k}$

2. Déterminons la probabilité qu'au moins un enfant soit concerné par une hypotrophie sévère au cours d'un mois donné. Calculons $P(Y \geqslant 1)$.

   $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}97^{100} \approx 0{,}95$.

Partie C

Dans une autre région, on s'intéresse à la proportion p des enfants qui ont un poids de naissance compris entre 2 600 g et 4 000 g.

En prenant un échantillon de 500 enfants nés dans cette région, on observe que 370 enfants ont un poids de naissance compris entre 2 600 g et 4 000 g.

Donnons une estimation de p par un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %.

La fréquence observée f est $\dfrac{370}{500} = 0{,}74$

L'intervalle au niveau de confiance de 95 % calculé à partir de la fréquence observée f est :

$\left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}, f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}})\right] \left[0{,}74 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}74(1-0{,}74)}{500}}, 0{,}74 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}74(1-0{,}74)}{500}})\right] \approx$ $[0{,}70\ ;\ 0{,}78]$

La proportion p appartient à l'intervalle $[0{,}70; 0{,}78]$au niveau de confiance de 95 %.

Exercice 4 **7 points**

Les deux premières parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante. Plusieurs questions de la partie C peuvent être traitées de façon indépendante.

Lors de l'administration d'un analgésique au moyen d'une perfusion à débit continu, on désigne par $y(t)$ la quantité (en μg) d'analgésique présente dans l'organisme d'un patient en fonction de l'instant t (en min).

On admet que y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) suivante : $y' + 0,14y = 2$ où y' est la fonction dérivée de y.

Partie A : Résolution de l'équation différentielle (E)

1. Résolvons l'équation différentielle (E).

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(x) = Ce^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.

$a = 0{,}14$ $b = 2$ par conséquent $y(t) = Ce^{-0{,}14t} + \dfrac{2}{0{,}14}$ où C est une constante quelconque.

2. Déterminons la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

$f(0) = Ce^{-0{,}14\times 0} + \dfrac{2}{0{,}14} = C + \dfrac{2}{0{,}14} = 0$ d'où $C = -\dfrac{2}{0{,}14} \approx -14{,}29$.

Il en résulte $f(t) = -14{,}29e^{-0{,}14t} + 14{,}29$.

Partie B : Étude d'une fonction *f*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 14,29\left(1 - e^{-0{,}14t}\right)$$

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
On prendra comme unités 1 cm pour 2 min sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 μg sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminons $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Nous savons que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 14{,}29 + \lim\limits_{t\to+\infty} (-14{,}29e^{-0{,}14t}) = 14{,}29$

La droite D d'équation $y = 14,29$ est asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Montrons que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = 2{,}0006e^{-0{,}14t}$.

$f'(t) = 14{,}29\left(0 - (-0{,}14e^{-0{,}14t}\right) = 14{,}29 \times 0{,}14e^{-0{,}14t} = 2{,}000\,6e^{-0{,}14t}$

b. étudions le sens de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ par conséquent $f'(t) > 0$ pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$ comme produit de réels strictement positifs.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I. Il en résulte que f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. Déterminons une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$f(0) = 0 \quad f'(0) = 2{,}000\,6e^0 = 2{,}000\,6$

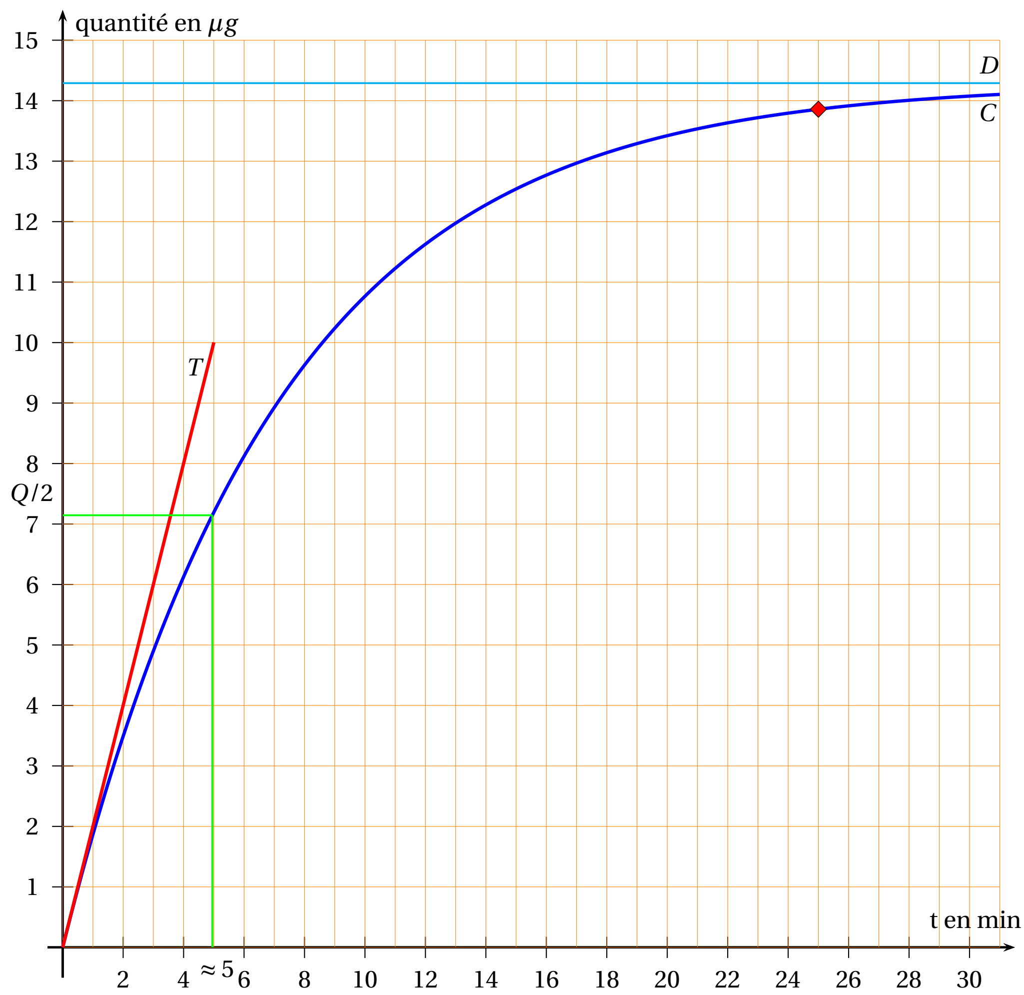
Une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 est $y = 2{,}000\,6x$.

4. **a.** Complétons le tableau de valeurs suivant :

t	0	5	10	15	20	30
$f(t)$	0	7,2	10,8	12,5	13,4	14,1

les valeurs sont arrondies au dixième.

b. Les droites T et D ainsi que la courbe représentative C sont tracés ci dessous dans un repère orthogonal.



Partie C : Exploitation des résultats de la partie B

La fonction f étant la fonction définie dans la partie B, on admet que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,30]$, $f(t)$ représente, à l'instant t, la quantité d'analgésique présente dans l'organisme au cours d'une perfusion.
La quantité $Q = 14{,}29\,\mu$g s'appelle « quantité d'analgésique à l'équilibre ».

1. Cette quantité Q peut-elle être atteinte ? Non, puisque cette quantité est la valeur limite au voisinage de l'infini.

2. À l'aide de la courbe C, déterminons graphiquement le temps au bout duquel la quantité d'analgésique présente dans l'organisme du patient atteint la moitié de Q. Lisons l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 7{,}145$. Nous lisons approximativement 5.

3. Au bout de 25 minutes, la quantité d'analgésique est d'environ $13{,}86\,\mu g$. $\dfrac{13{,}86}{14{,}29} \approx 0{,}97$.

   La quantité d'analgésique représente environ 97 % de la quantité Q.