Corrigé du baccalauréat STL Métropole juin 2012
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

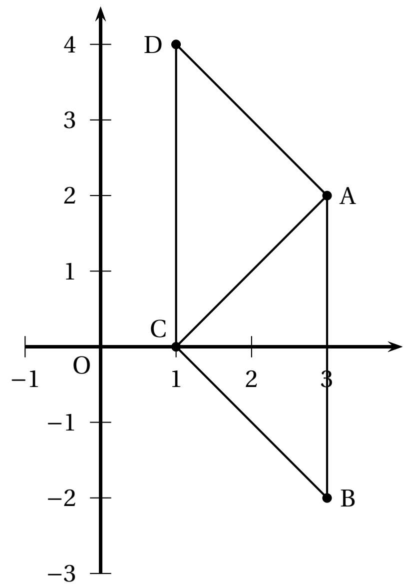
EXERCICE 1 **5 points**

1. Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, avec A et B réels quelconques. Ici $\omega^2 = \frac{1}{4}$, donc réponse **c.**
2. On a $\text{E}(X) = 0\times 0,12 + 2\times 0,7 + 5\times 0,18 = 1,4 + 0,9 = 2,3$ et l'écart-type est environ 1,42 : réponse **c.**
3. Il faut que $x + 3 > 0 \iff x > -3$ et que $2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$, donc finalement que $x > \frac{1}{2}$.
   L'équation est équivalente à $\ln(x+3)(2x-1) = \ln 9 \iff (x+3)(2x-1) = 9 \iff 2x^2+5x-12 = 0$; $\Delta = 25+96 = 121 = 11^2$; il y a deux solutions $x_1 = \frac{-5+11}{4} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-5-11}{4} = -4$. Comme -4 n'est pas dans l'ensemble de définition la seule solution est $\frac{3}{2}$. Réponse **d.**
4. $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \text{e}^{-x}\,\text{d}x = \left[-\text{e}^{-x}\right]_0^{\ln 2} = -\text{e}^{-\ln 2} + \text{e}^0 = 1 - \frac{1}{\text{e}^{\ln 2}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Réponse **b.**
5. Avec $u(x) = \text{e}^x + 1$, la dérivée de $f(x) = 2\ln u(x)$ est $f'(x) = 2u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{2\text{e}^x}{\text{e}^x + 1}$. Réponse **b.**

EXERCICE 2 **5 points**

1. $\Delta = 36 - 52 = -16 = (4\text{i})^2$. Il y a donc deux racines complexes :
   $z_1 = \dfrac{6 + 4\text{i}}{2} = 3 + 2\text{i}$ et $z_2 = \dfrac{6 - 4\text{i}}{2} = 3 - 2\text{i}$.
2. **a.** $P(1) = 1 - 7 + 19 - 13 = 20 - 20 = 0$; 1 est donc racine de P.
   b. $P(z) = (z-1)\left(az^2 + bz + c\right) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c =$
   $az^3 + z^2(b-a) + z(c-b) - c = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$.
   Par identification on a donc le système :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1\\ b-a & = & -7\\ c-b & = & 19\\ -c & = & -13\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1\\ b-1 & = & -7\\ 13-b & = & 19\\ c & = & 13\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1\\ b & = & -6\\ 13-b & = & 19\\ c & = & 13\end{array}\right.$$
   On a donc $P(z) = (z-1)\left(z^2 - 6z + 13\right)$.
   c. $P(z) = 0 \iff (z-1)\left(z^2 - 6z + 13\right) \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-1 & = & 0\\ z^2 - 6z + 13 & = & 0\end{array}\right.$, soit d'après la question **1.** :
   $$S = \{3 - 2\text{i}\ ;\ 3 + 2\text{i}\ ;\ 1\}$$
3. Voir à la fin de l'exercice
4. **a.** On a $\text{AB}^2 = (3-3)^2 + (-2-2)^2 = 16$; donc AB = 4;
   $\text{AC}^2 = (1-3)^2 + (0-2)^2 = 4 + 4 = 8$; donc $\text{AC} = \sqrt{8}$;
   $\text{BC}^2 = (1-3)^2 + (0+2)^2 = 4 + 4 = 8$; donc $\text{AC} = \sqrt{8}$.
   $\sqrt{8} = \sqrt{8} \iff \text{AC} = \text{BC}$ montre que ABC est isocèle en C;
   $8 + 8 = 16 \iff \text{AC}^2 + \text{BC}^2 = \text{AB}^2$ montre d'après la réciproque du théorème de Pythagore que ABC est rectangle en C.
   b. Soit D$(x\ ;\ y)$ le point tel que ABCD est un parallélogramme; le milieu de [AC] est donc le même que celui de [BD], d'où :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{3+1}{2} & = & \dfrac{3+x}{2}\\ \dfrac{2+0}{2} & = & \dfrac{-2+y}{2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 4 & = & 3+x\\ 2 & = & -2+y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & x\\ 4 & = & y\end{array}\right.$$
   D$(1\ ;\ -4)$.

5.



PROBLÈME **10 points**

$$f(x) = (-2x+6)\mathrm{e}^{-0,5x}$$

Partie A
Interprétations graphiques

1. f semble être décroissante sur $]-\infty~;~5]$, puis croissante sur $[5~;~+\infty[$.
2. Sur $]-\infty~;~3[$, $f(x) > 0$;
   Sur $]3~;~+\infty[$, $f(x) < 0$;
   $f(3) = 0$.

Partie B

1. On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -0,5x = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-0,5x} = +\infty$.
   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(-2x+6) = +\infty$ donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
2. **a.** $f(x) = -2x\mathrm{e}^{-0,5x} + 6\mathrm{e}^{-0,5x}$.
   On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-0,5x} = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,5x} = 0$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   b. Le résultat précédent montre que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.
3. **a.** On dérive f comme un produit : pour tout réel
   $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-0,5x} + (-2x+6)\times(-0,5)\mathrm{e}^{-0,5x} = \mathrm{e}^{-0,5x}[-2+x-3] = (x-5)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

   b. On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x-5$.
   - si $x > 5$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur $]5~;~+\infty[$;
   - si $x < 5$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur $]-\infty~;~5[$;
   - est le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. **a.** Les résultats précédents confirment bien les interprétations graphiques de la partie A.

   b. $f(5) = (-10+6)\text{e}^{-2,5} = -4\text{e}^{-2,5} \approx -0,328$

   c. Dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0 \iff (-2x+6)\text{e}^{-0,5x} = 0 \iff (-2x+6) = 0 \iff 6 = 2x \iff 3 = x$, (car $\text{e}^{-0,5x} > 0$). La fonction f ne s'annule que pour $x = 3$.

5. Les résultats précédents confirment bien les interprétations graphiques de la partie A.

Partie C

1. Voir à la fin du problème.
2. $F(x) = (4x-4)\text{e}^{-0,5x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $F'(x) = 4\text{e}^{-0,5x} + (4x-4) \times (-0,5)\text{e}^{-0,5x} = \text{e}^{-0,5x}(4-2x+2) = (-2x+6)\text{e}^{-0,5x} = f(x)$, donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. On a vu que sur $[1\,;\,3]$, f est positive, donc l'aire de la la portion de plan $\mathscr{P}$ comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ est en unité d'aire égale à l'intégrale :
   $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_1^3 = F(3) - F(1) = (4\times 3-4)\text{e}^{-0,5\times 3} - (4\times 1-4)\text{e}^{-0,5\times 1} = 8\text{e}^{-1,5} - 0 = 8\text{e}^{-1,5}$ (u. a.) soit environ 1,79 u.a.

Annexe à rendre avec la copie