∽ Baccalauréat STL Biotechnologies ∾
Nouvelle-Calédonie – 26 octobre 2022

EXERCICE 1 commun à tous les candidats
(physique-chimie et mathématiques)

Partie B : (mathématiques, 2 points)

On note $C(t)$ la concentration en ions hydroxyde, exprimée en mol/L, à l'instant t, exprimé en seconde et C_0 la concentration en ions hydroxyde à l'instant $t = 0$.
Dans les conditions décrites dans la partie A, $C_0 = 0{,}016$ mol/L et $k_1 = 0{,}017\ \text{S}^{-1}$.
La fonction C est donc solution de l'équation différentielle (E) suivante :

$$y' = -k_1 y \qquad (E)$$

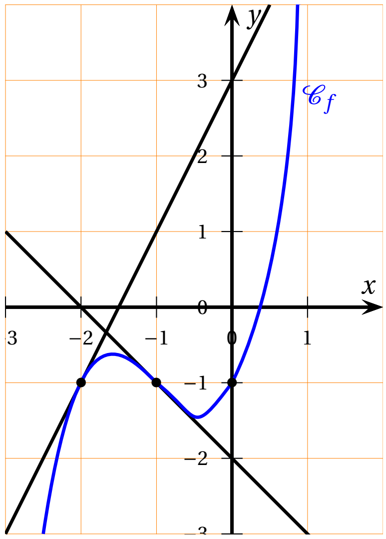
1. Vérifions que la fonction C définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $C(t) = C_0\mathrm{e}^{-k_1 t}$ est une solution de (E).
   $C'(t) = -k_1 C_0\,\mathrm{e}^{-k_1 t}$. Par conséquent, nous avons bien $y' = -k_1 y$.
   C est une solution de cette équation différentielle.
   Montrons que $C(0) = C_0$.
   $$C(0) = C_0 \times\ \mathrm{e}^{-k_1\times 0} = C_0 \times 1 = C_0.$$
   On admet que C est la seule solution de (E) qui vérifie $C(0) = C_0$.
2. Déterminer par le calcul le temps de demi-réaction $t_{1/2}$.
   On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi à la seconde.
   Calculons l'instant t pour lequel $C(t) = \frac{1}{2}C_0$. Résolvons
   $$\begin{aligned} C_0\,\mathrm{e}^{-0{,}017t} &= \frac{1}{2}C_0\\ \mathrm{e}^{-0{,}017t} &= \frac{1}{2}\\ -0{,}017t &= -\ln 2\\ t &= \frac{\ln(2)}{0{,}017}\\ t &\approx 41 \end{aligned}$$
   Ce résultat montre qu'au bout d'environ 41 s la concentration en ions hydroxyde est la moitié de la concentration initiale.

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (4 points) (mathématiques)

Vous traiterez 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées.
Écrire sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la bonne , réponse.
Aucune justification n'est attendue.

Question 1

On donne ci-dessous un tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:
$f'(-2) =$



a. ~~0~~
b. 2
c. ~~−1~~
d. ~~−2,25~~

$m = \dfrac{3-(-1)}{0-(-2)} = 2$

Question 2

Écrire sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la bonne réponse.
Aucune justification n'est attendue.
On considère l'équation $\ln(x) = 7$.
Cette équation admet pour solution :

a. $\cancel{\ln(7)}$
b. $\cancel{\ln\left(e^7\right)}$
c. e^7
d. $\cancel{\dfrac{1}{7}}$

Question 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2x}$.
Déterminer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f.
Justifier la réponse.

$$f = uv \quad f' = u'v + uv' \qquad f'(x) = 1 \times e^{2x} + x \times (2e^{2x}) = (2x+1)e^{2x}$$

Question 4

Soit ABCD un carré de côté 4 cm. Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
B est le projeté orthogonal de C sur (AB). Il en résulte $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AB = 4^2 = 16$

Question 5

On considère l'équation différentielle suivante :

$$v' = -4{,}5v + 6{,}3 \qquad (E)$$

Déterminons la fonction v solution de l'équation (E) et vérifiant la condition initiale $v(0) = 0$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par
$y(x) = C\,e^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.

$a = 4{,}5$ $b = 6{,}3$ par conséquent sur $\mathbb{R}$ $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-4{,}5x} + \dfrac{6{,}3}{4{,}5}$
c'est-à-dire $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-4{,}5x} + \frac{7}{5}$ où C est une constante quelconque.
Déterminons C.

$$C(0) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}45\times 0} + \frac{7}{5} = 0 \quad \text{d'où} \quad C = -\frac{7}{5}$$

La fonction v solution de l'équation (E) et vérifiant la condition initiale $v(0) = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$v(x) = -\frac{7}{5}\,\mathrm{e}^{-4{,}5x} + \frac{7}{5}$$

Question 6

Afin d'étudier l'évolution d'une population de bactéries à l'intérieur d'une boîte fermée, on considère la fonction f définie pour tout $t \geqslant 0$ par

$$f(t) = \frac{100}{1 + \mathrm{e}^{-1{,}3t}}$$

où $f(t)$ désigne le nombre de bactéries (exprimé en millier) à l'instant t (exprimé en heure).

Le programme en Python ci-contre affiche la valeur de t (arrondie à l'unité) à partir de laquelle le nombre de bactéries à l'intérieur de l'enceinte dépasse 99 000.
La valeur affichée lorsqu'on exécute ce programme est

```
from math import exp
T=0
while 100/(1+exp(-1,3*T)) <= 99 :
    T = T+1
print (T)
```

4.