Corrigé du baccalauréat STL Antilles–Guyane juin 2008 Chimie de laboratoire et de procédés industriels

EXERCICE 1 **4 points**

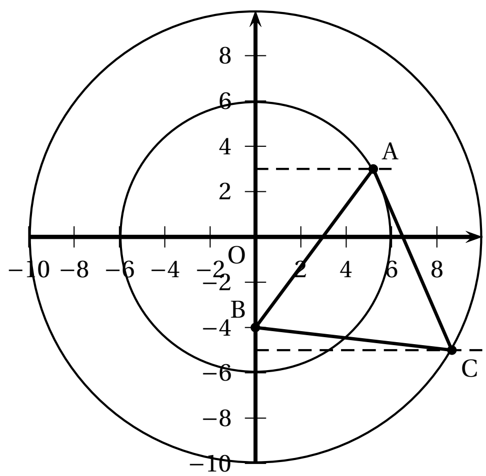
1. $z_A = 6\left(\cos\frac{\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{3} + 3\text{i}.$

   $z_B = 4\text{e}^{-\frac{\text{i}\pi}{2}} = 4\left(\cos\frac{-\pi}{2} + \text{i}\sin\frac{-\pi}{2}\right) = 4(-1\text{i}) = -4\text{i}.$

2. $z_C = 5\sqrt{3} - 5\text{i} = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \text{i}\frac{1}{2}\right) = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\frac{-1}{2}\right) = 10\left(\cos\frac{-\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{-\pi}{6}\right).$

3. On place A avec le cercle centré en O de rayon 6 et la droite d'équation $y = 3$.
   B se place facilement sur l'axe des imaginaires.
   C se place avec le cercle centré en O de rayon 10 et la droite d'équation $y = -5$.

4. $AB^2 = |z_B - z_A|^2 = -3\sqrt{3} - 7\text{i}|^2 = 27 + 49 = 76.$
   $AC^2 = |z_C - z_A|^2 = 2\sqrt{3} - 8\text{i}|^2 = 12 + 64 = 76.$
   $BC^2 = |z_C - z_B|^2 = 5\sqrt{3} - \text{i}|^2 = 75 + 1 = 76.$
   On a donc $AB^2 = AC^2 = BC^2 \iff AB = AC = BC \iff$ ABC est un triangle équilatéral.



EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.**

Tirage 1 \ Tirage 2	0	1	2	3
0	00	01	02	03
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23

   b. Trois cas favorables sur 12 : 00, 11, 22, donc une probabilité de $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

2. **a.** $X \in \{-1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5\}$

   b.

X	-1	0	1	2	3	5
$p(X = x_i)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

c. Il faut gagner 3 ou 4 €, donc la probabilité est égale à $\dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

d. $\mathrm{E}(X) = -1 \times \dfrac{6}{12} + 0 \times \dfrac{1}{12} + 1 \times \dfrac{2}{12} + 2 \times \dfrac{2}{12} + 3 \times \dfrac{1}{12} + 5 \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{-6+2+4+3+5}{12} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$.
L'espérance de gain est positive, donc le jeu est favorable au joueur.

PROBLÈME **11 points**

Partie I

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -x + \dfrac{7}{4} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. On factorise $\left(-x\mathrm{e}^{x} + \dfrac{7}{4}\mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}\left(-x + \dfrac{7}{4}\right)\mathrm{e}^{x} = \left(-x + \dfrac{7}{4}\right)\mathrm{e}^{2x} = f(x)$.

b. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$ donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
Graphiquement ce résultat signifie que l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.

c. $f\left(\dfrac{7}{4}\right) = \left(-\dfrac{7}{4} + \dfrac{7}{4}\right)\mathrm{e}^{\frac{7}{4}} = 0$.

Ceci signifie que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses pour $x = \dfrac{7}{4}$.

3. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = -1\mathrm{e}^{2x} + 2\left(-x + \dfrac{7}{4}\right)\mathrm{e}^{2x} = \left(-2x + \dfrac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$.

b. Comme $\mathrm{e}^{2x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de la différence $-2x + \dfrac{5}{2}$.

$-2x + \dfrac{5}{2} > 0 \iff \dfrac{5}{2} > 2x \iff \dfrac{5}{4} > x \iff x < \dfrac{5}{4}$.
Donc $f'(x) > 0$ sur $\left]-\infty\,;\, \dfrac{5}{4}\right[$ et de même $f'(x) < 0$ sur $\left]\dfrac{5}{4}\,;\, +\infty\right[$.

4. On en déduit donc le tableau de variations de la fonction avec un maximum en $x = \dfrac{5}{4}$ qui est égal à $f\left(\dfrac{5}{4}\right) = \left(-\dfrac{5}{4} + \dfrac{7}{4}\right)\mathrm{e}^{2\times\frac{5}{4}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}} \approx 6{,}09$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}$ est égal au nombre dérivé
$f'(0) = \left(-2 \times 0 + \dfrac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{2\times 0} = \dfrac{5}{2}$

6. Voir à la fin.

Partie II

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$F'(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{9}{8}\right)\mathrm{e}^{2x} = \left(-\dfrac{1}{2} - 2x + \dfrac{9}{4}\right)\mathrm{e}^{2x} = \left(-x + \dfrac{7}{4}\right)\mathrm{e}^{2x} = f(x)$.
On a $'(x) = f(x)$, donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Voir à la fin.

b. Le tableau de variations montre que sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{7}{4}\right]$, $f(x) \geqslant 0$. Donc l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^{\frac{7}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{\frac{7}{4}} = F\left(\frac{7}{4}\right) - F(0) = \left(-\frac{\frac{7}{4}}{2}+\frac{9}{8}\right)\mathrm{e}^{2\times\frac{7}{4}} - \left[\left(-\frac{0}{2}+\frac{9}{8}\right)\mathrm{e}^{2\times 0}\right] = \left(-\frac{7}{8}+\frac{9}{8}\right)\mathrm{e}^{\frac{7}{2}} - \frac{9}{8} =$
$\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{7}{2}} - \dfrac{9}{8}$ (u. a.)
Comme une unité d'aire est égale à $2 \times 1 = 2$ cm^2, on a :
$\mathscr{A} = 2\left[\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{7}{2}} - \dfrac{9}{8}\right] = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{7}{2}} - \dfrac{9}{4} \approx 14,31$ cm^2.