∽ Corrigé du baccalauréat STL Métropole septembre 2006 ∾
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice autorisée — 3 heures

Durée de l'épreuve : 3 heures — Coefficient : 4

EXERCICE 1 **4 points**

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, où y est une fonction deux fois dérivable de la variable réelle x.

1. On sait que les solutions sont de la forme :
$f(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$, avec $A,\ B$ réels quelconques.

2. Il faut trouver les réels A et B tels que :
$$\left\{\begin{array}{rcl} f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) & = & -\sqrt{3}\\ f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) & = & 2\end{array}\right.$$
Or $f'(x) = -2A\sin 2x + 2N\cos 2x$. Le système s'écrit donc :
$$\left\{\begin{array}{rcl} A\cos\pi + B\sin\pi & = & -\sqrt{3}\\ -2A\sin\pi - 2B\cos\pi & = & 2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -A & = & -\sqrt{3}\\ 2B & = & 2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} A & = & \sqrt{3}\\ B & = & 1\end{array}\right.$$
On a donc : $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x$.

3. On a $2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\cos 2x\cos\frac{\pi}{6} - 2\sin 2x\sin\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - 2 \times \frac{1}{2}\sin 2x = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = f(x)$.

4. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ est égale à :
$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x\right]\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\pi - \frac{1}{2}\cos\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{2}{\pi}.$$

EXERCICE 2 **5 points**

1. a. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $\dfrac{1}{2}z^2 + z + 1 = 0$.

On a $\Delta = 1 - 4 \times \dfrac{1}{2} = -1 = \mathrm{i}^2$.
Il y a donc deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \dfrac{-1 + \mathrm{i}}{2 \times \frac{1}{2}} = -1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = -1 - \mathrm{i}$.

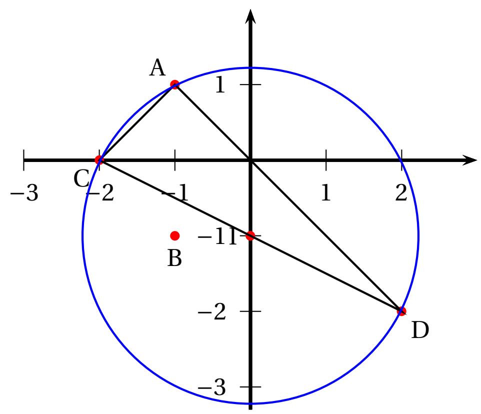
b. On retrouve bien z_1 et z_2 de la question précédente.
$z_2 = -1 - \mathrm{i}$; $z_4 = -2(-1 + \mathrm{i}) = 2 - 2\mathrm{i}$.

2. a. Voir à la fin de l'exercice.

b. On a I$(0\,;\,-1)$

c. On a : $\mathrm{AC}^2 = (-2 + 1)^2 + +(0 - 1)^2 = 1 + 1 = 2$;
$\mathrm{AD}^2 = (2 + 1)^2 + (-2 - 1)^2 = 9 + 9 = 18$;
$\mathrm{CD}^2 = (2 + 2)^2 + (-2 + 0)^2 = 16 + 4 = 20$.
$2 + 18 = 20 \iff \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AD}^2 = \mathrm{CD}^2 \iff$ ACD est un triangle rectangle en A d'hypoténuse [CD]

d. On sait que le triangle rectangle en A, ACD est inscrit dans le cercle de diamètre [CD] donc de centre I et de rayon $\dfrac{\text{CD}}{2} = \dfrac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$.



Problème **11 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(3 - x^2\right)\text{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthononnal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
Une partie de la courbe $\mathscr{C}$ est représentée sur la feuille annexe, à rendre avec la copie.

Partie I : étude de la fonction *f*

1. a. De $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3 - x^2 = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^x = +\infty$, on déduit par produit de limites que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b. On a $f(x) = 3\text{e}^x - x^2\text{e}^x$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^x = 0$ et que l'on nous dit que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\text{e}^x = 0$, on a par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. a. f produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$:
$f'(x) - 2x\text{e}^x + \left(3 - x^2\right)\text{e}^x = \text{e}^x\left(-x^2 - 2x + 3\right) = \left(-x^2 - 2x + 3\right)\text{e}^x$.

b. Comme $\text{e}^x > 0$, quel que soit e réel x, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $-x^2 - 2x + 3$.
Celui-ci a une racine évidente : 1 ; il peut donc s'écrire :
$-x^2 - 2x + 3 = (x - 1)(-x - 3)$. L'autre racine est donc -3.
On sait que ce trinôme est négatif sauf entre les racines soit sur l'intervalle $]-3\,;\,1[$.

c. De la question précédente on déduit que :

- $f'(x) > 0$ sur $]-3\,;\,1[$: f est croissante sur cet intervalle ;
- $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,-3[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$.
- $f'(-3) = f'(1) = 0$; $f(-3) = -6\text{e}^{-3} \approx -0,3$ et $f(1) = 2\text{e} \approx 5,44$ sont les extremums de cette fonction. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$				
$f(x)$	0 ↘	-6e^{-3} ↗	2e ↘	$-\infty$

3. Les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses ont des abscisses qui vérifient :
$f(x) = 0 \iff \left(3 - x^2\right)\text{e}^x \iff 3 - x^2 = 0 \iff x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.
Donc $\text{A}\left(-\sqrt{3}\,;\,0\right)$ et $\text{B}\left(0\,;\,\sqrt{3}\right)$.

Partie II : Tracé d'une parabole

1. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = 6 - 2x^2$.
On a : $6 - 2\left(-\sqrt{3}\right)^2 = 6 - 2 \times 3 = 0$ et $6 - 2\left(\sqrt{3}\right)^2 = 6 - 2 \times 3 = 0$.
Les points A et B appartiennent à la parabole $\mathcal{P}$.

2. a. $\left(6 - 2x^2\right) - f(x) = \left(6 - 2x^2\right) - \left(3 - x^2\right)\text{e}^x = 2\left(3 - x^2\right) - \left(3 - x^2\right)\text{e}^x = \left(3 - x^2\right)\left(2 - \text{e}^x\right)$.

b. • $3 - x^2 \geqslant 0$ sur l'intervalle $\left[-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\right]$ donc a fortiori sur l'intervalle $\left[-\sqrt{3}\,;\,\ln 2\right]$;
• $2 - \text{e}^x \geqslant 0 \iff 2 \geqslant \text{e}^x \iff \ln 2 \geqslant x \iff x \leqslant \ln 2$; donc $2 - \text{e}^x \geqslant 0$ sur l'intervalle $\left[-\sqrt{3}\,;\,\ln 2\right]$.
Conclusion : sur l'intervalle $\left[-\sqrt{3}\,;\,\ln 2\right]$, $\left(3 - x^2\right)\left(2 - \text{e}^x\right) \geqslant 0$.

c. Le résultat précédent montre que sur l'intervalle $\left[-\sqrt{3}\,;\,\ln 2\right]$, $\left(6 - 2x^2\right) - f(x) \geqslant 0$, ce qui signifie géométriquement que la parabole $\mathcal{P}$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}$.

3. Voir à la fin en rouge.

Partie III : Calcul d'aires

1.

$$G(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right)\text{e}^x.$$

a. On a $G'(x) = (2x - 2)\text{e}^x + \left(x^2 - 2x + 2\right)\text{e}^x = \text{e}^x\left(2x - 2 + x^2 - 2x + 2\right) = x^2\text{e}^x$.

b. Puisque $f(x) = 3\text{e}^x - x^2\text{e}^x$, d'après le résultat précédent, une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction F définie par :
$F(x) = 3\text{e}^x - \left(x^2 - 2x + 2\right)\text{e}^x = \left(-x^2 + 2x + 1\right)\text{e}^x$.

2. a. Voir à la fin.

b. Une primitive de la fonction $x \longmapsto 6 - 2x^2$ est $6x - \dfrac{2}{3}x^3$.
On a vu que sur l'intervalle $\left[-\sqrt{3}\,;\,\ln 2\right]$, donc en particulier sur l'intervalle $\left[-\sqrt{3}\,;\,0\right]$, la parabole est au dessus de la courbe $\mathcal{C}$, donc l'aire $\mathcal{A}$ est égale (en unité d'aire) à l'intégrale :
$\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{0}\left[\left(6 - 2x^2\right) - \left(3 - x^2\right)\text{e}^x\right]\text{d}x = \left[6x - \frac{2}{3}x^3 - F(x)\right]_{-\sqrt{3}}^{0} = \left[6x - \frac{2}{3}x^3 - \left(-x^2 + 2x + 1\right)\text{e}^x\right]_{-\sqrt{3}}^{0} =$
$0 - 1 + 6\sqrt{3} - \dfrac{2}{3} \times 3\sqrt{3} - \left(-3 - 2\sqrt{3} + 1\right)\text{e}^{-\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - 1 + \left(2 + 2\sqrt{3}\right)\text{e}^{-\sqrt{3}} \approx 4,96$. (u. a.)
On peut approximativement vérifier ce résultat sur la figure.

Annexe (à rendre avec la copie)