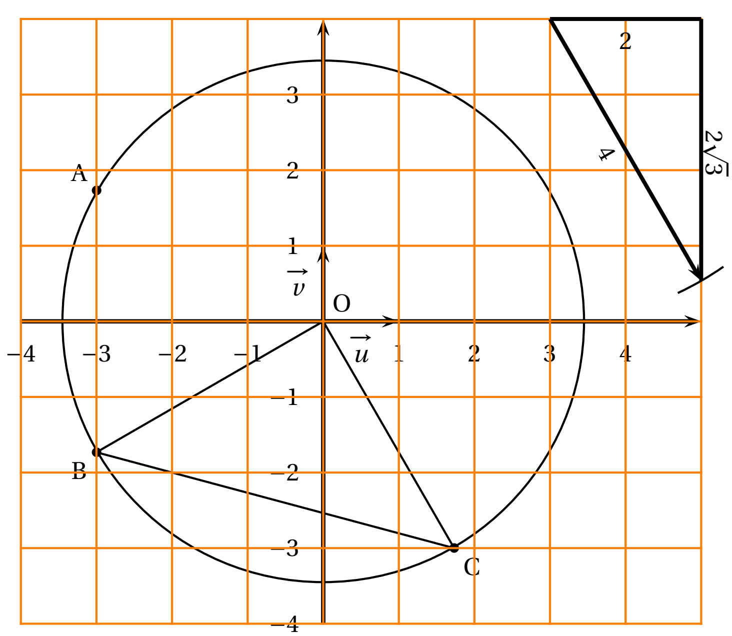
∽ Corrigé du baccalauréat STL Métropole ∾
septembre 2008 Chimie de laboratoire et de procédés industriels

EXERCICE 1 **4 points**

1. On a $\Delta = 36 - 4 \times 12 = 36 - 48 = -12 = \left(2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$.
   Le discriminant est négatif : l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{-6 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -3 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad -3 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

2. On a $|z_{\mathrm{A}}|^2 = \left|-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right|^2 = 9 + 3 = 12 \Rightarrow |z_{\mathrm{A}}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
   Donc $z_{\mathrm{A}} = 2\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.
   Comme $z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}}$, on a $z_{\mathrm{B}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{-5\pi}{6}\right)$.
   Placement : voir la figure. On peut construire une longueur de $2\sqrt{3}$ comme longueur du troisième côté d'un triangle rectangle dont un côté mesure 2 et l'hypoténuse 4.
3. **a.** Voir la figure.
   b. $z_{\mathrm{C}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - 3\mathrm{i}$.
   c. On a $\mathrm{BC}^2 = |z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}|^2 = \left|\sqrt{3} - 3\mathrm{i} - \left(-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\right|^2 = \left|3 + \sqrt{3} + \left(\sqrt{3} - 3\right)\right|^2 = \left(3 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3} - 3\right)^2 = 9 + 3 + 6\sqrt{3} + 3 + 9 - 6\sqrt{3} = 24$.
   On a $24 = 12 + 12 \iff \mathrm{BC}^2 = \mathrm{OB}^2 + \mathrm{OC}^2 \iff$ (OBC) est un triangle rectangle en O et comme OB = OC, il est rectangle isocèle en O. (réciproque du théorème de Pythagore).
   Rem. On aurait aussi pu montrer que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$.



EXERCICE 2 **4 points**

1. **a.** $u_1 = u_0 - \dfrac{5}{100}u_0 = \dfrac{95}{100}u_0 = 0,95 \times 75 = 71,25$.
De même $u_2 = 0,95u_1 = 0,95 \times 71,25 = 67,6875$.
b. Quel que soit le naturel n $u_{n+1} = u_n - \dfrac{5}{100}u_n = 0,95u_n$.
Cette relation montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $u_0 = 75$.
On sait qu'alors $u_n = u_0 \times 0,95^n = 75 \times 0,95^n$.
c. On a donc $u_7 = 75 \times 0,95^7 \approx 52,375$ soit au dixième près 52,4 cl.
2. Il faut résoudre l'inéquation à résoudre dans $\mathbb{N}$:
$u_n < 25 \iff 75 \times 0,95^n < 25 \iff 3 \times 0,95^n < 1 \iff 0,95^n < \dfrac{1}{3} \iff$ (grâce à la croissance de la fonction logarithme népérien) $n\ln 0,95 < -\ln 3 \iff$ (changement d'ordre car $\ln 0,95 < 0$, donc son inverse aussi est négatif) $n > \dfrac{-\ln 3}{\ln 0,95}$ et comme $\dfrac{-\ln 3}{\ln 0,95} \approx 21,4$ il faut au moins 22 jours pour que la bouteille contienne moins de 25 cl.

Problème **12 points**

Partie A

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
2. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2-x) = -\infty$, d'où par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
3. **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left[-1\mathrm{e}^x + (2-x)\mathrm{e}^x\right] = \dfrac{1}{2}\left[(1-x)\mathrm{e}^x\right]$.
b. On sait que quel que soit le réel x, $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x >$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-x)$.
$1-x > 0 \iff 1 > x \iff x < 1$. Donc sur $]-\infty\,;\,1[$, $f'(x) > 0$ et la fonction est croissante sur cet intervalle;
De même sur $]1\,;\,+\infty[$, la fonction est décroissante.
c. $f(1) = \dfrac{1}{2}(2-1)\mathrm{e}^1 = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$ est donc le minimum de la fonction. En ce point la dérivée est nulle donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ est horizontale.
d. On a donc le tableau de variations suivants :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{\mathrm{e}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Partie B

1. Une équation de $\mathscr{T}$ est : $y = f(2) + f'(2)(x-2)$;
$f(2) = \dfrac{1}{2}(2-2)\mathrm{e}^2 = 0$;
$f'(2) = \dfrac{1}{2}(1-2)\mathrm{e}^2 = -\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$.
Donc l'équation de $\mathscr{T}$ s'écrit :
$y = 0 - \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}(x-2) \iff y = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2(2-x)$.

2. **a.** $\dfrac{1}{2}\text{e}^2(2-x)-f(x)=\dfrac{1}{2}\text{e}^2(2-x)-\dfrac{1}{2}(2-x)\text{e}^x=\dfrac{1}{2}(2-x)\left[\text{e}^2-\text{e}^x\right]$.

b. Comme $\dfrac{1}{2}>0$, il faut étudier le signe du produit $(2-x)\left[\text{e}^2-\text{e}^x\right]$.
On dresse le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	
e^2-e^x		$+$	0	$-$	
produit		$+$	0	$+$	

Donc sur $\mathbb{R}$, $\left[\dfrac{1}{2}\text{e}^2(2-x)-f(x)\right]\geqslant 0$ avec égalité uniquement pour $x=2$.

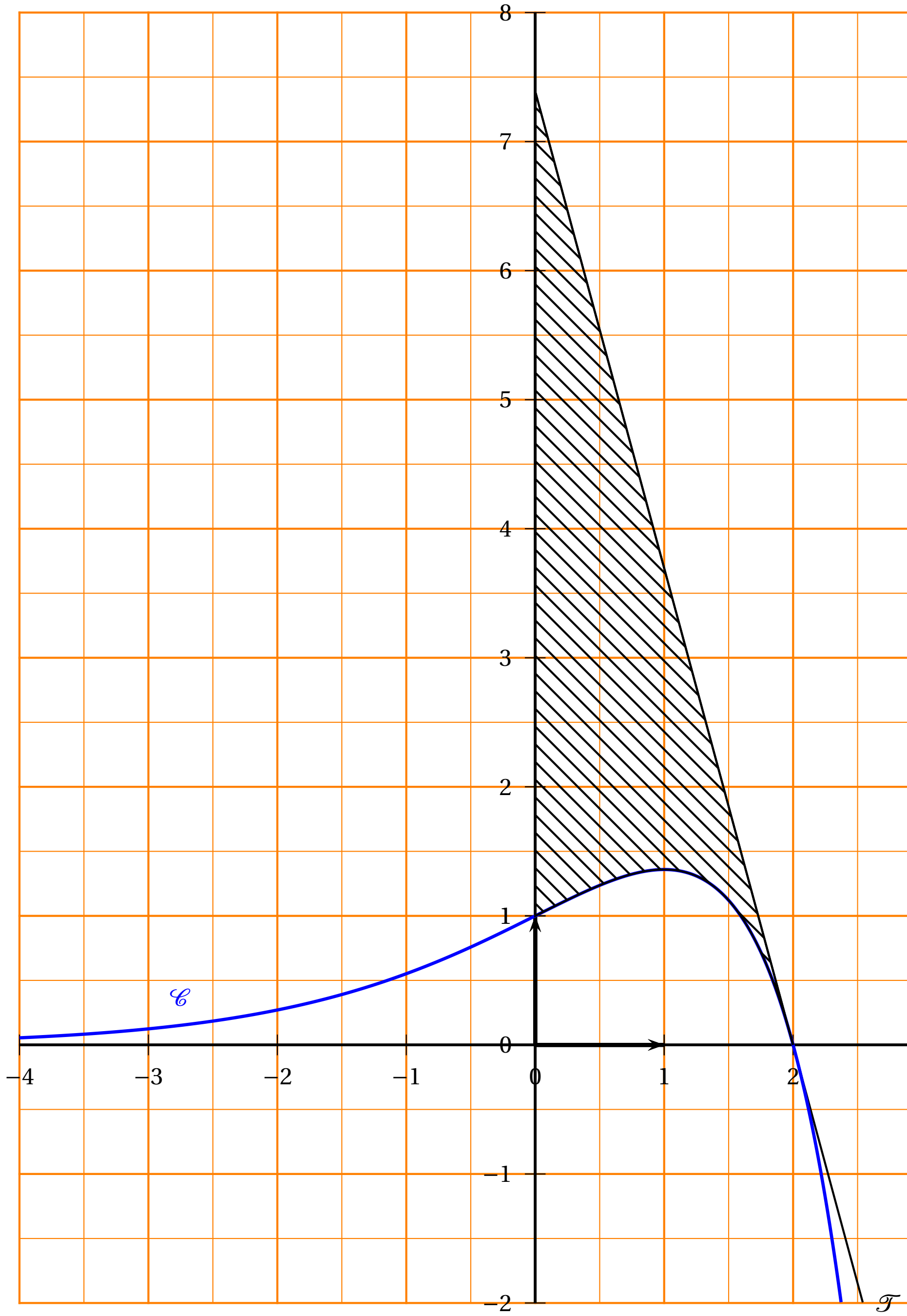
c. Graphiquement ce résultat signifie que la tangente $\mathcal{T}$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}$ avec un seul point commun $(2\,;0)$.

3. Voir à la fin

Partie C

1. Voir la figure à la fin

2. On a $f(0)=\dfrac{1}{2}(2-0)\text{e}^0=1>0$; donc sur l'intervalle $[0\,;2]$, $f(x)\geqslant 0$; l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}$ est donc égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{2}(2-x)\left(\text{e}^2-\text{e}^x\right)\text{d}x=\int_0^2 g'(x)\,\text{d}x=\left[g(x)\right]_0^2=g(2)-g(0)=\frac{1}{2}(2-3)\text{e}^2+\frac{1}{2}\text{e}^2\left(2\times 2-\frac{2^2}{2}\right)-$
$\left[\dfrac{1}{2}(0-3)\text{e}^0+\dfrac{1}{2}\text{e}^2\left(2\times 0-\dfrac{0^2}{2}\right)\right]=-\dfrac{1}{2}\text{e}^2+\text{e}^2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\text{e}^2}{2}$.
L'unité d'aire vaut $2\times 2=4\ \text{cm}^2$, donc :
$\mathcal{A}=4\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{\text{e}^2}{2}\right)=6+2\text{e}^2\approx 20,78\ \text{cm}^2$.


8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
$\mathscr{C}$
$\mathscr{T}$