Corrigé du baccalauréat STL juin 2006
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

1. $P(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 8 \times 2 - 8 = 8 - 16 + 16 - 8 = 0$.
   2 est donc une racine de P.
   On développe $(z-2)\left(z^2-2z+4\right) = z^3 - 2z^2 + 4z - 2z^2 + 4z - 8 = z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = P(z)$.
   Donc $P(z) = (z-2)\left(z^2-2z+4\right)$.
2. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 = \left(2\text{i}\sqrt{3}\right)^2$.
   $\Delta < 0$, donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

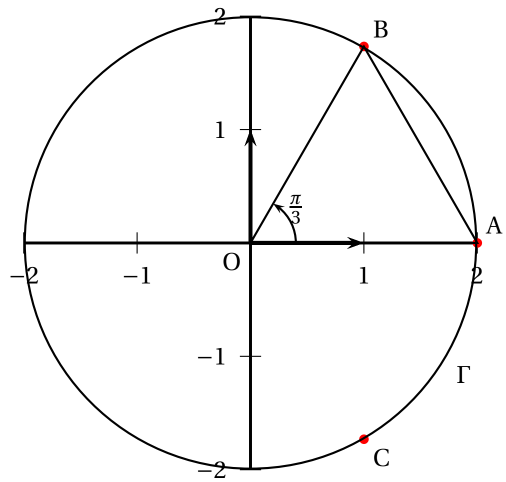
$$\frac{2+2\text{i}\sqrt{3}}{2} = 1 + \text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 1 - \text{i}\sqrt{3}.$$

   On a $P(z) = 0 \iff (z-2)\left(z^2-2z+4\right) = 0 \left\{ \begin{array}{l} z-2=0 \\ z^2-2z+4=0 \end{array} \right.$
   La première équation a pour solution 2 et on a résolu la seconde équation. Donc :

$$S = \{2\ ;\ 1+\text{i}\sqrt{3}\ ;\ 1-\text{i}\sqrt{3}\}.$$

Partie B

1. **a.** Voir à la fin.
   b. On a $|a| = 2 = \text{OA}$, puis $|b|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |b| = 2 = \text{OB}$ et comme $c = \overline{b}$, $|c| = 2 = \text{OC}$.
   On a OA = OB = OC = 2 : les trois points A, B et C appartiennent au cercle Γ de centre O de rayon 2.
   c. Voir la figure.
2. On peut écrire $b = 2\left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$.
   Un argument de b est donc $\frac{\pi}{3}$.
   Comme a a un argument nul, on en déduit que $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \frac{\pi}{3}$.
   Le triangle OAB est isocèle car OA = OB et comme son angle au sommet mesure $\frac{\pi}{3}$ les deux autres angles ont eux aussi pour mesure $\frac{\pi}{3}$. Conclusion OAB est un triangle équilatéral.



EXERCICE 2 **5 points**

1. $P_1 = P_0 - P_0 \times \dfrac{1,25}{100} \approx 100{,}3 \approx 1\,000$;

   $P_2 = P_1 - P_1 \times \dfrac{1,25}{100} \approx 100{,}3 \approx 988$.

2. **a.** $P_{n+1} = P_n - P_n \times 0,0125 = P_n(1 - 0,0125) = 0{,}9875 P_n$.

   b. La relation précédente signifie que la suite (P_n) est une suite géométrique de raison 0,987 5, de premier terme $P_0 = 1013$.

   c. On sait qu'alors $P_n = P_0 \times (0{,}9875)^n = 1013 \times (0{,}9875)^n$.

3. L'altitude 3 200 correspond à $n = 32$. Donc $P_{32} = 1013 \times (0{,}9875)^{n32} \approx 677$ (hPa).

4. Il faut avoir $1013 \times (0{,}9875)^n < 600 \iff (0{,}9875)^n < \dfrac{600}{1013} \iff$

   $\ln(0{,}9875^n) < \ln \dfrac{600}{1013} \iff n \ln(0{,}9875) < \ln \dfrac{600}{1013} \iff n > \dfrac{\ln \dfrac{600}{1013}}{\ln(0{,}9875)}$.

   La calculatrice donne $\dfrac{\ln \dfrac{600}{1013}}{\ln(0{,}9875)} \approx 41,7$.

   Donc $n > 41,7 \Rightarrow n \geqslant 42$.

   À partir de 4 200 m la pression devient inférieure à 600 hectoPascal.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} -\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, il résulte par produit des limites que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

   Ce résultat signifie graphiquement que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.

2. On peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, d'où par somme des limites

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Ce résultat signifie graphiquement que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

3. **a.** La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle

$$f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{x} \times x - 1 \times (1 - \ln x)}{x^2} = \dfrac{-1 - 1 + \ln x}{x^2} = \dfrac{\ln x - 2}{x^2}.$$

b. Comme $x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $\ln x - 2$.
Or $\ln x - 2 > 0 \iff \ln x > 2 \iff x > \mathrm{e}^2$ (par croissance de la fonction exponentielle). La fonction est donc croissante sur $]\mathrm{e}^2\,;\,+\infty[$.
$\ln x - 2 < 0 \iff \ln x < 2 \iff x < \mathrm{e}^2$ (par croissance de la fonction exponentielle). La fonction est donc décroissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}^2[$.

c. D'où le tableau de variations :

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

4. I a une ordonnée nulle. Or $f(x) = 0 \iff \dfrac{1 - \ln x}{x} = 0 \iff 1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff x = \mathrm{e}$.
Donc $\mathrm{I}(\mathrm{e}\,;\,0)$.

5. Une équation de $\mathscr{T}$ est $y = f(1) + f'(1)(x-1)$.
$f(1) = \dfrac{1}{1} = 1$ et $f'(1) = \dfrac{\ln 1 - 2}{1^2} = -2$.
Une équation de $\mathscr{T}$ est donc $y = -2(x-1) + 1 \iff y = -2x + 3$.

6. Voir à la fin.

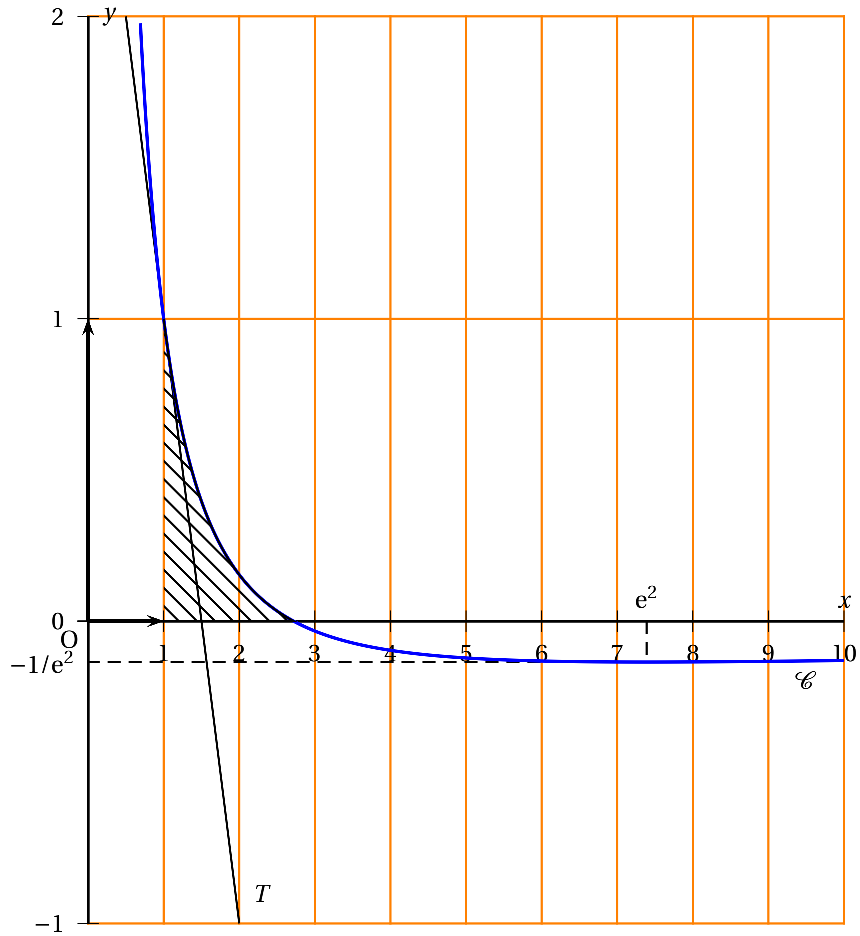
Partie B

1. **a.** g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle : $g'(x) = 2\ln x \times \dfrac{1}{x} = 2\dfrac{\ln x}{x}$.

b. Du résultat précédent on déduit qu'une primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

2. **a.** $\mathrm{J} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{1 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right]\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\dfrac{1}{x}\right]\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} \left[\dfrac{\ln x}{x}\right]\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{\mathrm{e}} - \left[\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \ln\mathrm{e} - \ln 1 - \dfrac{1}{2}(\ln\mathrm{e})^2 + \dfrac{1}{2}(\ln 1)^2 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ (u. a.)

b. On a $f(1) = 1$ et $f(\mathrm{e}) = 0$. La fonction f est donc positive sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$. L'intégrale précédente représente donc l'aire en unité d'aire de la surface limitée par le courbe $\mathscr{C}$, l'axe des des abscisses et les deux droites verticales d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.



y
2
1
0
O
−1/e²
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
e²
x
𝒞
T