Corrigé du baccalauréat STL 11 septembre 2012
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice et formulaire autorisés

Durée de l'épreuve : 3 heures — Coefficient : 4

EXERCICE 1 — **5 points**

$$z_1 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - \mathrm{i}.$$

1. On a $|z_1|^2 = (-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$, donc $|z_1| = 2$.

   $z_1 = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Donc un argument de z_1 est $\dfrac{2\pi}{3}$.

   De même $|z_2|^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$, donc $|z_2| = \sqrt{2}$.

   $z_2 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{4}\right)$. Un argument de z_2 est donc $-\dfrac{\pi}{4}$.

2. On donne $Z = \dfrac{z_1^2}{z_2}$.

   a. $|Z| = \left|\dfrac{z_1^2}{z_2}\right| = \dfrac{\left|z_1^2\right|}{|z_2|} = \dfrac{|z_1|^2}{|z_2|} = \dfrac{2^2}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

   $\arg Z = \arg\left(\dfrac{z_1^2}{z_2}\right) = \arg\left(z_1^2\right) - \arg z_2 = 2\arg z_1 - \arg z_2 = \dfrac{4\pi}{3} - \left(\dfrac{-\pi}{4}\right) = \dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{16\pi}{12} + \dfrac{3\pi}{12} = \dfrac{19\pi}{12}$.

   Donc $Z = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$.

   b. $Z = \dfrac{z_1^2}{z_2} = \dfrac{\left(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2}{1 - \mathrm{i}} = \dfrac{1 - 3 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}} = \dfrac{-2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}} = \dfrac{\left(-2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)(1 + \mathrm{i})}{(1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})} = \dfrac{-2 + 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(-2 - 2\sqrt{3}\right)}{1 + 1} = -1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(-1 - \sqrt{3}\right)$.

   c. On a $Z = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\sqrt{2}\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(-1 - \sqrt{3}\right)$.

   En identifiant partie réelles et parties imaginaires, on obtient :

   $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) = -1 + \sqrt{3}$ et $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = -1 - \sqrt{3}$. Donc finalement :

   $\cos\left(\dfrac{19\pi}{12}\right) = \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(-1 + \sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ et

   $\sin\left(\dfrac{19\pi}{12}\right) = \dfrac{-1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(-1 - \sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

EXERCICE 2 — **5 points**

Une urne contient 100 jetons, bleus, verts ou rouges.
15 jetons sont bleus et il y a trois fois plus de jetons verts que de jetons bleus.

1. S'il y a 15 jetons bleus, le nombre de jetons verts est $3 \times 15 = 45$. Avec r jetons rouges, on a donc :

   $15 + 45 + r = 100$, soit $r + 60 = 100$ ou $r = 40$ jetons rouges.

   Donc $p(A) = \dfrac{40}{100} = 0,4$ et $p(B) = 1 - p(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.

2. **a.** X peut prendre les valeurs $5 - 8 = -3$, $9 - 8 = 1$, et $10 - 8 = 2$.

b. Le tableau de la loi de probabilité est :

Sortie	rouge	vert	bleu
$X = x_i$	-3	1	2
$p(X = x_i)$	0,4	0,45	0,15

c. $\mathrm{E}(X) = 0,4 \times (-3) + 0,45 \times 1 + 0,15 \times 2 = -1,2 + 0,45 + 0,3 = 0,45$.
Cela signifie que sur un grand nombre de parties la perte moyenne par partie est de 45 centimes.

3. Le nouveau tableau de la loi de probabilité est :

Sortie	rouge	vert	bleu
$X = x_i$	-3	1	$x-8$
$p(X = x_i)$	0,4	0,45	0,15

Et $\mathrm{E}(X) = 0,4 \times (-3) + 0,45 + 0,15(x-8) = 0$ soit $-1,2 + 0,45 + 0,15x - 1,2 = 0$ puis $0,15x = 1,95$ et $x = \dfrac{1,95}{0,15} = 13$.
Si le joueur reçoit 13 € pour la sortie d'un jeton bleu, l'espérance mathématique sera nulle.

PROBLÈME **10 points**

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^{x} + 3x + 7.$$

1. a. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b. Voir à la fin.

c. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - (3x+7) = \mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x + 3x + 7 - (3x+7) = \mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x$.
Or on a vu que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} d(x) = 0$: ceci montre que la droite D d'équation $y = 3x+7$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de moinsl'infini.

d. On a vu que :
$d(x) = \mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 7))$.
On sait que quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc le signe de $d(x)$ est celui de $\mathrm{e}^x - 7$.

- $\mathrm{e}^x - 7 = 0$ si $\mathrm{e}^x = 7$ ou $x = \ln 7$.
- $\mathrm{e}^x - 7 > 0$ si $\mathrm{e}^x > 7$ ou $x > \ln 7$.
- $\mathrm{e}^x - 7 < 0$ si $\mathrm{e}^x < 7$ ou $x < \ln 7$.

Donc si $x < \ln 7$, $d(x) < 0$ ce qui signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de l'asymptote D ; si $x > \ln 7$, $d(x) > 0$ ce qui signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de l'asymptote D. Si $x = \ln 7$ la courbe et la droite ont un point commun de coordonnées $(\ln 7\,;\, 3\ln 7 + 7)$.

2. a. On a déjà vu plus haut cette factorisation.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7}{\mathrm{e}^x} = 0$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - 7 + \dfrac{3x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{7}{\mathrm{e}^x} = +\infty$ et par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$.

3. a. Pour tout réel x, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x + 3$.
Posons $\mathrm{e}^x = X$; alors $f'(x) = f'(X) = 2X^2 - 7X + 3$, trinôme en X du second degré.
$\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 3 = 49 - 24 = 25 = 5^2$.
Les solutions sont $X_1 = \dfrac{7+5}{4} = 3$ et $X_2 = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$.
On sait qu'alors $f'(X) = 2(X - X_1)(X - X_2) = f'(x) = 2(\mathrm{e}^x - 3)\left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\right) = (\mathrm{e}^x - 3)(2\mathrm{e}^x - 1)$.

b. $f'(x) = 0$ si $\left\{\begin{array}{l l l} e^x - 3 & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ 2e^x - 1 & = & 0 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l l l} e^x & = & 3 \\ \text{ou} & & \\ e^x & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$ et enfin $\left\{\begin{array}{l l l} x & = & \ln 3 \\ \textbf{ou} & & \\ x & = & \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \end{array}\right.$

On peut construire le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 3$		$+\infty$
$e^x - \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c. La question précédente donne le signe de la dérivée donc les variations de la fonction.

On a $f(-\ln 2) = \left(e^{-\ln 2}\right)^2 - 7e^{-\ln 2} - 3\ln 2 + 7 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{7}{2} - 3\ln 2 + 7 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{7}{2} - 3\ln 2 + 7 = \frac{15}{4} - 3\ln 2.$

$f(\ln 3) = \left(e^{-\ln 3}\right)^2 - 7e^{\ln 3} + 3\ln 3 + 7 = 3^2 - 7 \times 3 + 3\ln 3 + 7 = 3\ln 3 - 5.$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{15}{4} - 3\ln 2$	$\searrow$	$3\ln 3 - 5$	$\nearrow$	$+\infty$

4. a. $f'(x) = 3$ ou $2e^{2x} - 7e^x + 3 = 3$ soit $2e^{2x} - 7e^x = 0$ ou $e^x\left(2e^x - 7\right) = 0$.

On sait que quel que soit le réel x, $e^x > 0$, donc il reste $2e^x - 7 = 0$ soit $e^x = \frac{7}{2}$, d'où $x = \ln \frac{7}{2}$.

Le coefficient directeur de la droite D est égal à 3, donc le nombre dérivé étant le coefficient directeur de la tangente en un point, il existe un seul point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x = \ln \frac{7}{2}$ où la tangente est parallèle à D.

b. Pour $x = \ln 7$, $f(\ln 7) = e^{2\ln 7} - 7e^{\ln 7} + 3\ln 7 + 7 = \left(e^{\ln 7}\right)^2 - 7 \times 7 + 3\ln 7 + 7 = 7^2 - 49 + 3\ln 7 + 7 = 3\ln 7 + 7$.

Or le point de D d'abscisse $\ln 7$ a pour image $3 \times \ln 7 + 7 = 3\ln 7 + 7$ soit la même ordonnée.

Rem. On avait déjà vu celà à la question 1. d.

c. Voir à la fin.

5. a. Voit à la fin.

b. L'aire de la surface comprise entre la droite et la courbe se calcul en intégrant la fonction différence des deux fonctions : $x \longmapsto (3x+7) - \left(e^{2x} - 7e^x + 3x + 7\right) = 7e^x - e^{2x}$.

Donc :

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^{\ln 7} \left(7e^x - e^{2x}\right) \mathrm{d}t = \left[7e^x - \dfrac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 7} = 7e^{\ln 7} - \dfrac{1}{2}e^{2\ln 7} - \left(7e^0 - \dfrac{1}{2}e^{2\times 0}\right) = 7 \times 7 - \left(\dfrac{1}{2}e^{2\ln 7}\right)^2 - \left(7 - \dfrac{1}{2}\right) = 49 - \dfrac{49}{2} - 7 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{98 - 49 - 14 + 1}{2} = \dfrac{36}{2} = 18\ \text{cm}^2.$

ANNEXE

À rendre avec la copie