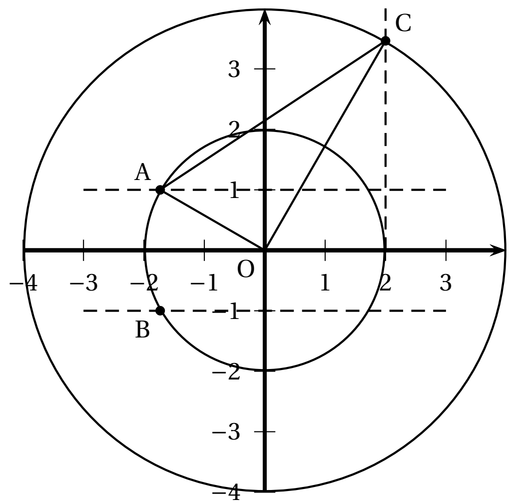
Corrigé du baccalauréat STL Métropole juin 2008 Chimie de laboratoire et de procédés industriels

EXERCICE 1 **4 points**

1. On a $\Delta = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4 = (2\text{i})^2$.
   $\Delta < 0$, l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :
   $$\frac{2\sqrt{3}+2\text{i}}{2} = \sqrt{3}+\text{i} \quad \text{et} \quad \sqrt{3}-\text{i}.$$
2. $z_1 = \sqrt{3}+\text{i}$, donc $|z_1|^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 3+1 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_1| = 2$.
   On peut écrire $z_1 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\sin\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.
   Un argument de z_1 est donc $\dfrac{\pi}{6}$.
   Comme $z_2 = \overline{z_1}$, on a $|z_2| = 2$ et un argument de z_2 est égal à $-\dfrac{\pi}{6}$.
3. **a.** $z_A = 2\text{e}^{5\text{i}\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\left[\frac{5\pi}{6}\right] + \text{i}\sin\left[\frac{5\pi}{6}\right]\right) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}+\text{i} = -z_2$.
   $z_B = 2\text{e}^{-5\text{i}\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\left[\frac{-5\pi}{6}\right] + \text{i}\sin\left[\frac{-5\pi}{6}\right]\right) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \text{i}\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}-\text{i} = -z_1$.
   $z_C = 4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2+2\text{i}\sqrt{3}$.

   b. Le point A est sur le cercle de centre O de rayon 2 et sur la droite d'équation $y = 1$, le point B sur le même cercle et sur le droite d'équation $y = -1$ et le point C sur le cercle centré en O de rayon 4 et sur le droite d'équation $x = 2$. Voir plus bas.

   c. On a $\text{AC}^2 = |z_C - z_A|^2 = \left|2+2\text{i}\sqrt{3} - \left(-\sqrt{3}+\text{i}\right)\right|^2 = \left|2+2\text{i}\sqrt{3}+\sqrt{3}-\text{i}\right|^2 =$
   $\left(2+\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}-1\right)^2 = 4+3+4\sqrt{3}+12+1-4\sqrt{3} = 20$.
   On sait d'autre part que $\text{OA}^2 = 4$ et que $\text{OC}^2 = 16$.
   Donc $20 = 4+16 \iff \text{AC}^2 = \text{OA}^2 + \text{OC}^2 \iff$ OAC est un triangle rectangle en O.
   Autre méthode : On a $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OC}}\right) = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui montre que l'angle $\widehat{\text{AOC}}$ est droit.



EXERCICE 2 — 5 points

1. a. y est définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
De $y(t) = f(t) - 20$ on déduit $y'(t) = f'(t)$. D'où en remplaçant dans l'équation différentielle $f(t) - 20$ par $y(t)$:
$y'(t) = \lambda y(t)$.

b. On sait que les solutions de cette équation s'écrivent $y(t) = Ce^{\lambda t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

c. On a donc $y(t) = f(t) - 20 = Ce^{\lambda t} \iff f(t) = 20 + Ce^{\lambda t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

d. $f(0) = 220 \iff 20 + C = 220 \iff C = 200$, d'où l'écriture :
$f(t) = 20 + 200e^{\lambda t}$.

2. a. On a donc $f\left(\frac{1}{4}\right) = 60 \iff 20 + 200e^{\lambda \times \frac{1}{4}} = 60 \iff 200e^{\frac{\lambda}{4}} = 40 \iff 5e^{\frac{\lambda}{4}} = 1 \iff e^{\frac{\lambda}{4}} = \dfrac{1}{5} \iff \dfrac{\lambda}{4} = \ln\dfrac{1}{5} \iff \dfrac{\lambda}{4} = -\ln 5 \iff \lambda = -4\ln 5$.
Finalement la température à l'instant t est donnée par :
$f(t) = 200e^{(-4\ln 5)t} + 20$.

b. Une demi-heure correspond à un temps de $\dfrac{1}{2}$, d'où :

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 20 + 200e^{(-4\ln 5)\times\frac{1}{2}} = 20 + 200e^{(-2\ln 5)} = 20 + \dfrac{200}{e^{(2\ln 5)}} = 20 + \dfrac{200}{e^{(\ln 5^2)}} = 20 + \dfrac{200}{25} = 20 + 8 = 28(\,°)$.

PROBLÈME — 11 points

1. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +16$.

2. a. Développons $(e^x - 2)(e^x - 8) = e^x 2x - 8e^x - 2e^x + 16 = e^{2x} - 10e^x + 16 = f(x)$.

b. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 8 = +\infty$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f'(x) = 2e^{2x} - 10e^x = 2e^x(e^x - 5)$.

b. Comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit x, le signe de $f'(x)$ est celui de $\mathrm{e}^x - 5$.

Or $\mathrm{e}^x - 5 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 5 \iff x > \ln 5$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) ; la fonction est croissante sur $]\ln 5\,;\,+\infty[$;

De même $\mathrm{e}^x - 5 < 0 \iff \mathrm{e}^x < 5 \iff x < \ln 5$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) ; la fonction est décroissante sur $]-\infty\,;\,\ln 5[$

4.

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,2
$f(x)$	15,5	14,61	2,5	7	$-3,8$	$-3,3$	7,2

5. **a.** Le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0 est le nombre dérivé $f'(0) = 2\mathrm{e}^{2\times 0} - 10\mathrm{e}^0 = 2 - 10 = -8$.

b. Voir à la fin.

c.

6. **a.** $f(\ln 2) = \mathrm{e}^{2\ln 2} - 10\mathrm{e}^{\ln 2} + 16 = \mathrm{e}^{\ln 2^2} - 10\mathrm{e}^{\ln 2} + 16 = 4 - 20 + 16 = 0$.

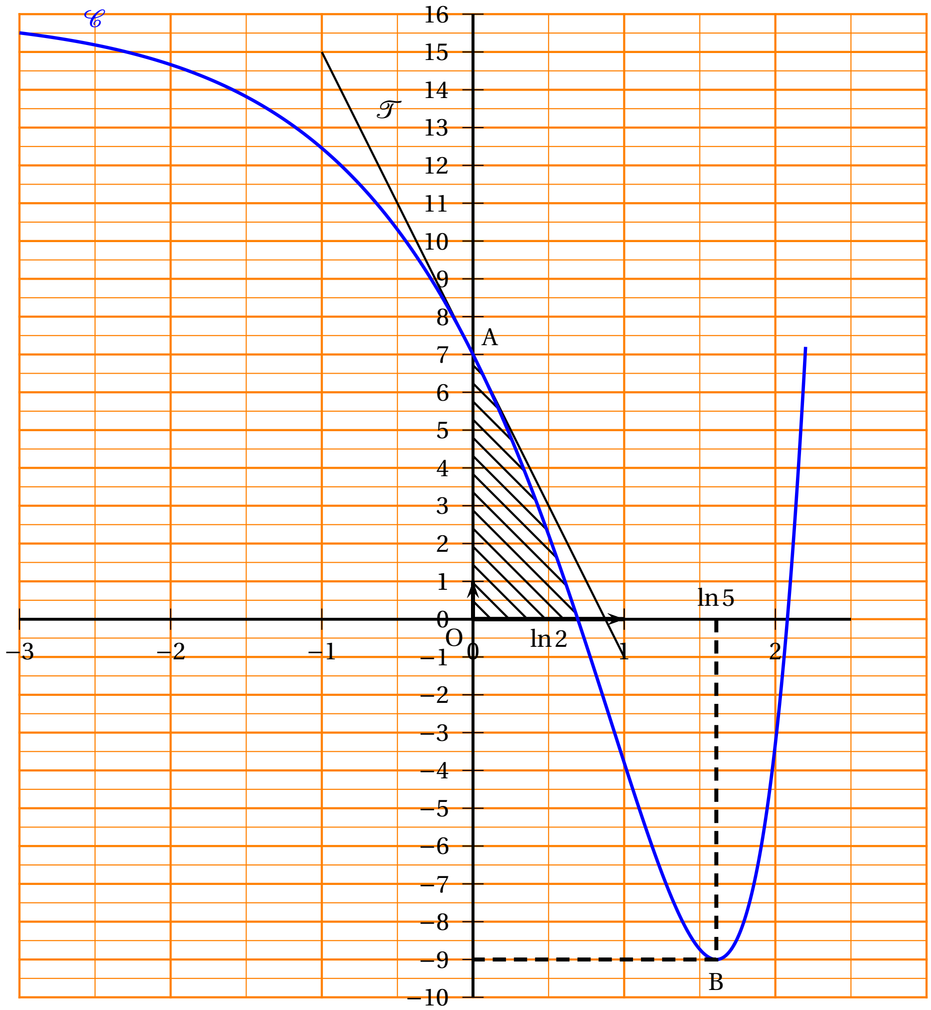
Puisque f s'annule en $x = \ln 2$ et que f est décroissante sur $[0\,;\,\ln 2]$ on peut en déduire que sur cet intervalle $f(x) \geqslant 0$.

b. On vient de voir que sur $[0\,;\,\ln 2]$, $f(x) \geqslant 0$, donc l'aire, en unité d'aire du domaine plan $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$ est égale à l'intégrale :

$\overset{\ln 2}{\underset{0}{\lim}} f(x)\,\mathrm{d}x = \overset{\ln 2}{\underset{0}{\lim}} \left(\mathrm{e}^{2x} - 10\mathrm{e}^x + 16\right)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - 10\mathrm{e}^x + 16x\right]_0^{\ln 2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2\ln 2}}{2} - 10\mathrm{e}^{\ln 2} + 16\ln 2 - \left(\dfrac{\mathrm{e}^{2\times 0}}{2} - 10\mathrm{e}^0 + 16\times 0\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{\ln 2^2}}{2} - 10\times 2 + 16\ln 2 - \left(\dfrac{1}{2} - 10\right) = 2 - 20 + 16\ln 2 - \dfrac{1}{2} + 10 = 16\ln 2 - \dfrac{17}{2}$ (u. a.)

Une unité d'aire est égale à $2 \times 0,5 = 1$ cm^2, donc $\mathscr{D} = 16\ln 2 - \dfrac{17}{2}$ (cm^2).

c. On a $\mathscr{D} \approx 2,59$ cm^2.



$\mathscr{C}$
$\mathscr{T}$
A
B
O
$\ln 2$
$\ln 5$