Corrigé du baccalauréat STL spécialité biotechnologies
Métropole 10 septembre 2019

EXERCICE 1 **5 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise fabrique en grande quantité des boîtes de Petri destinées à des laboratoires d'analyses microbiologiques.
Dans cet exercice, on étudie la qualité de la production de ces boîtes.

Partie A

L'entreprise affirme que la probabilité qu'une boîte ait un défaut est égale à 0,03. On prélève au hasard 100 boîtes dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 boîtes, associe le nombre de boîtes présentant un défaut.

1. La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,03$.

   X est distribuée selon la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}03$ puisque il y a répétition de cent tirages indépendants et identiques caractérisés par deux issues soit la boîte a un défaut avec une probabilité $p = 0,03$ soit la boîte n'a pas de défaut de probabilité $q = 1 - p = 0,97$.

   Par conséquent, $p(X = k) = \binom{100}{k}(0{,}03)^k(0{,}97)^{100-k}$.

2. Déterminons la probabilité de l'évènement A : « Le prélèvement contient exactement 4 boîtes ayant un défaut » c'est-à-dire $p(X = 4)$

   $p(X = 4) = \binom{100}{4}(0{,}03)^{96}(0{,}97)^{96} \approx 0{,}17$

3. Déterminons la probabilité de l'évènement B : « Le prélèvement contient au plus 3 boîtes ayant un défaut ».

   L'évènement B est composé des évènements élémentaires suivant : « Le prélèvement contient exactement 0 boîte ayant un défaut », « Le prélèvement contient exactement 1 boîte ayant un défaut », « Le prélèvement contient exactement 2 boîtes ayant un défaut », « Le prélèvement contient exactement 3 boîtes ayant un défaut ».

   $P(B) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$.

   $P(B) = 0{,}04755 + 0{,}14707 + 0{,}22515 + 0{,}22747 = 0{,}64724$

   La probabilité de l'évènement B : « Le prélèvement contient au plus 3 boîtes ayant un défaut » est à 10^{-2} près 0,65.

   Remarque : Certaines calculatrices donnent directement $P(0 \leqslant X \leqslant 3) = 0{,}647$

Partie B

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à une boîte de Petri prélevée au hasard, associe son diamètre en millimètre.
Le service qualité de l'entreprise estime que la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance $\mu = 89,7$ et d'écart type $\sigma = 0,20$.

1. Déterminons la probabilité $P(89{,}3 \leqslant Y \leqslant 90,1)$.

   À l'aide de la calculatrice, nous trouvons $P(89{,}3 \leqslant Y \leqslant 90{,}1) \approx 0{,}95$.

   Remarque : Nous pouvions remarquer que $\mu - 2\sigma = 89{,}7 - 2 \times 0{,}20 = 89{,}3$, $\mu + 2\sigma = 89{,}7 + 2 \times 0{,}20 = 90{,}1$
   $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$

2. Déterminons la probabilité qu'une boîte de Petri ait un diamètre supérieur ou égal à 89,9 mm. $P(Y \geqslant 89,9) \approx 0{,}16$.

   Remarque : $\mu + \sigma = 89{,}7 + 0{,}2 = 89{,}9$. $P(X \leqslant \mu - \sigma) = P(X \geqslant \mu + \sigma) = \frac{1}{2}\left(1 - P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma\right) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}683) = 0{,}1585$

Partie C

La machine de production a été réglée dans le but que 3 % au maximum des boîtes de Petri soient non conformes. On prélève un échantillon de 200 boîtes de Petri et on constate que parmi celles-ci, 9 sont non conformes.
Suite à ce constat, doit-on accepter le réglage de cette machine ? Pour ce faire, déterminons un intervalle de fluctuation. L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n, lorsque la proportion p dans la population est connue est :

$$\left[p-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p+1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$I=\left[0,03-1,96\sqrt{\frac{0,03(1-0,03)}{100}}\ ;\ 0,03+1,96\sqrt{\frac{0,03(1-0,03)}{100}}\right]=[-0,004\ ;\ 0,063]$$

La fréquence obtenue est : $\dfrac{9}{200}=0,045$. Appartenant à l'intervalle de fluctuation, il n'y a pas lieu de remettre en cause le réglage de cette machine.

EXERCICE 2 **3 points**

Une entreprise fabrique et commercialise des composants électroniques destinés à fonctionner de manière continue. On a étudié la durée de vie, en jour, de ces composants.
La variable aléatoire D associée à cette durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre
$\lambda=0,0005$.
On rappelle que $P(D\leqslant t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Pour chacune des affirmations suivantes, on précisera si elle est vraie ou fausse en justifiant de manière claire et concise la réponse donnée.
Affirmation 1 : L'espérance de cette loi est égale à 2 000.
Vraie car $\mathbb{E}(D)=\dfrac{1}{0,0005}=2000$.
Affirmation 2 : La probabilité qu'un composant de ce type tombe en panne après les 500 premiers jours est environ 0,221.
Fausse car $P(D\geqslant 500)=1-P(D\leqslant 500)=1-\left(1-\mathrm{e}^{-0,0005\times 500}\right)\approx 0,779$.
Affirmation 3 : L'entreprise souhaite qu'au maximum 10 % des composants tombent en panne au cours de la période de garantie. Cette période de garantie doit être d'environ 210 jours.
Vraie Cherchons t tel que $P(D<0,1)$.
$1-\mathrm{e}^{-0,0005t}<0,1\quad \mathrm{e}^{-0,0005t}>0,9\quad -0,0005t>0,9\quad t<\dfrac{\ln 0,9}{-0,0005}$ or $\dfrac{\ln 0,9}{-0,0005}\approx 210,7$

EXERCICE 3 **5 points**

Dans un laboratoire d'industrie laitière, on cultive une population de bactéries qui compte initialement 60 000 individus. On étudie l'évolution du nombre de bactéries en fonction du temps.

Partie A

On émet l'hypothèse que la population augmente de 18 % toutes les heures et on modélise l'évolution de cette population par une suite (u_n).
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de bactéries de la population étudiée après n heures.
On a alors $u_0=60000$.

1. À un taux d'évolution de 0,18 correspond un coefficient multiplicateur de 1+0,18 soit 1,18.
   $u_1=u_0\times 1,18=60000\times 1,18=70800$ et $u_2=70800\times 1,18=83544$.
2. $u_{n+1}=1,18\times u_n$.
3. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,18 et de premier terme 60 000.
4. Exprimons alors u_n en fonction de n. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n=u_0\times(q)^n$.
   $u_n=60000\times(1,18)^n$.

5. $u_6 = 60000 \times (1{,}18)^6 \approx 161973$, à l'unité près.

Cette valeur correspond au nombre de bactéries de la population étudiée après six heures.

Partie B

On souhaite déterminer à partir de combien d'heures la population de bactéries dépassera 200 000 individus. Pour cela, on utilise un algorithme.

1. Complétons l'algorithme de sorte qu'à la fin de son exécution, la variable N contienne le nombre d'heures cherché.

$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 60000$
Tant que $U < 200000$:
    $|N \leftarrow N+1$
    $|U \leftarrow 1{,}18U$
Fin Tant que

2. Déterminons le nombre d'heures à partir duquel la population de bactéries dépassera 200 000.

Exécutons l'algorithme.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	60 000	70 800	83 544	98 582	116 327	137 265	161 973	191 128	225 532	
$P < 200000$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	

Par conséquent au bout de huit heures, le nombre de bactéries dépassera les 200 000 individus.

EXERCICE 4 — 7 points

Des scientifiques étudient la croissance d'une plante vivace d'une variété donnée. Pour cela, ils ont relevé tous les mois la hauteur de plants témoins, mesurant tous 12 cm au début de l'expérimentation. Dans le tableau ci-dessous, h désigne la hauteur moyenne des plants, exprimée en centimètre, au bout de t mois.

t_i (exprimé en mois)	0	1	2	3	4	5	6
h_i (exprimé en centimètre)	12	16,6	20	22	23,1	23,6	23,8

1. Le nuage de points $M_i\,(t_i\,;\,h_i)$ correspondant au tableau ci-dessus a été construit sur l'annexe.

2. L'utilisation d'un ajustement affine du nuage de points ne semble pas pertinente. Les points ne semblent pas suivre une direction donnée.

3. On pose $y_i = \ln\left(\dfrac{24}{h_i} - 1\right)$.

Nous avons complété la troisième ligne du tableau donné en annexe en arrondissant les valeurs à $0{,}001$ près.

4. On nomme $\mathcal{D}$ la droite d'ajustement de y en t obtenue par la méthode des moindres carrés.

L'équation réduite de $\mathcal{D}$ est de la forme $y = at + b$ où a et b sont des nombres réels. En utilisant la calculatrice, nous obtenons $a = -0{,}804$ et $b = -0{,}005$ à $0{,}001$ près.

5. On admet que $h(t) = \dfrac{24}{1+\mathrm{e}^{-0{,}8t}}$.

Estimons, au centimètre près, la hauteur du plant au bout de 10 mois. Remplaçons t par 10. $h(10) = \dfrac{24}{1+\mathrm{e}^{-0{,}8\times 10}} \approx 23{,}99$.

Une estimation de la hauteur du plant au bout de dix mois serait de 24 cm.

Remarque : Dans le cas où $h = 24$, nous aurions alors $y = \ln 0$ ce qui est impossible.

6. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{24}{1+\mathrm{e}^{-0,8x}}.$$

a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on admet que :

$$g'(x) = \frac{19,2\mathrm{e}^{-0,8x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,8x}\right)^2}.$$

Étudions les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $g'(x) > 0$ comme quotient de nombres réels strictement positifs.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
Sur $[0\,;\,+\infty[$, $g'(x) > 0$ par conséquent g est strictement croissante sur cet intervalle.

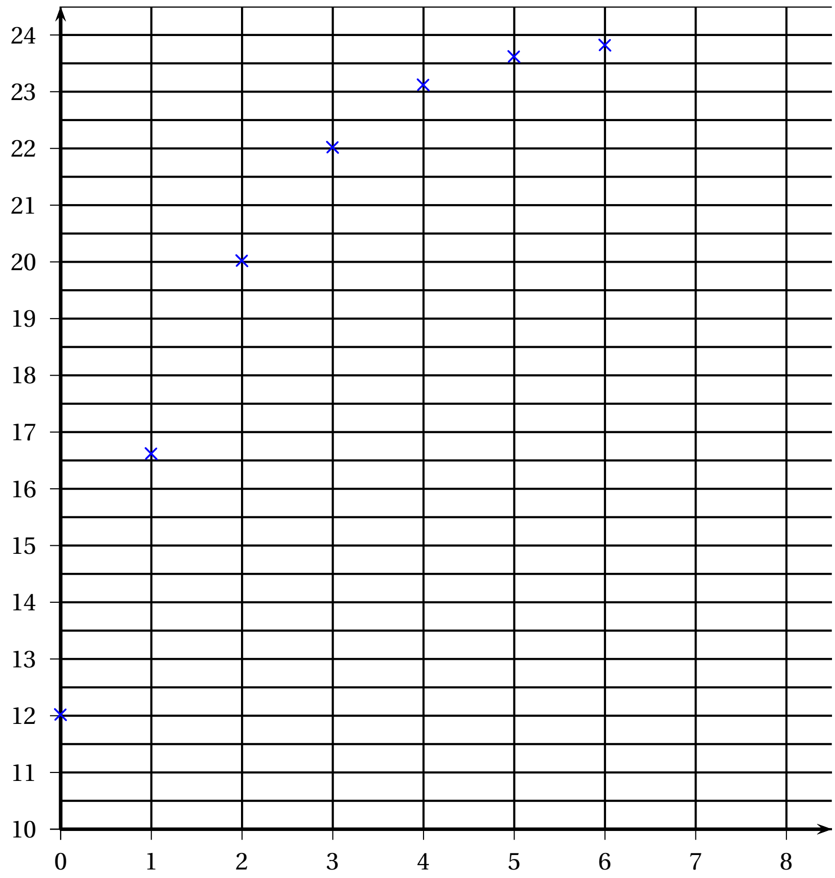
b. Déterminons la limite de la fonction g en $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)) = 24$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\mathrm{e}^{-0,8x}\right) = 1 + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-0,8x}\right) = 1$.
Graphiquement, la droite d'équation $y = 24$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$.

c. La taille de la plante ne pourra jamais atteindre 25 cm puisque la fonction est croissante et majorée par 24.

Annexe

À rendre avec la copie

Exercice 4, question 1



Exercice 4, question 3

t_i	0	1	2	3	4	5	6
h_i	12	16,6	20	22	23,1	23,6	23,8
y_i	0	−0,808	−1,609	−2,398	−3,245	−4,078	−4,779