Corrigé du baccalauréat STL Biochimie, génie biologique Métropole juin 2008 —

Durée de l'épreuve : 2h — Coefficient : 2

Exercice n° 1 (*10 points*)

L'invertase est un enzyme de la muqueuse de l'intestin grêle qui catalyse l'hydrolyse du saccharose alimentaire en glucose et fructose. Ceci se fait suivant la réaction :

$$\text{saccharose} + \text{eau} \longleftrightarrow \text{glucose} + \text{fructose}$$

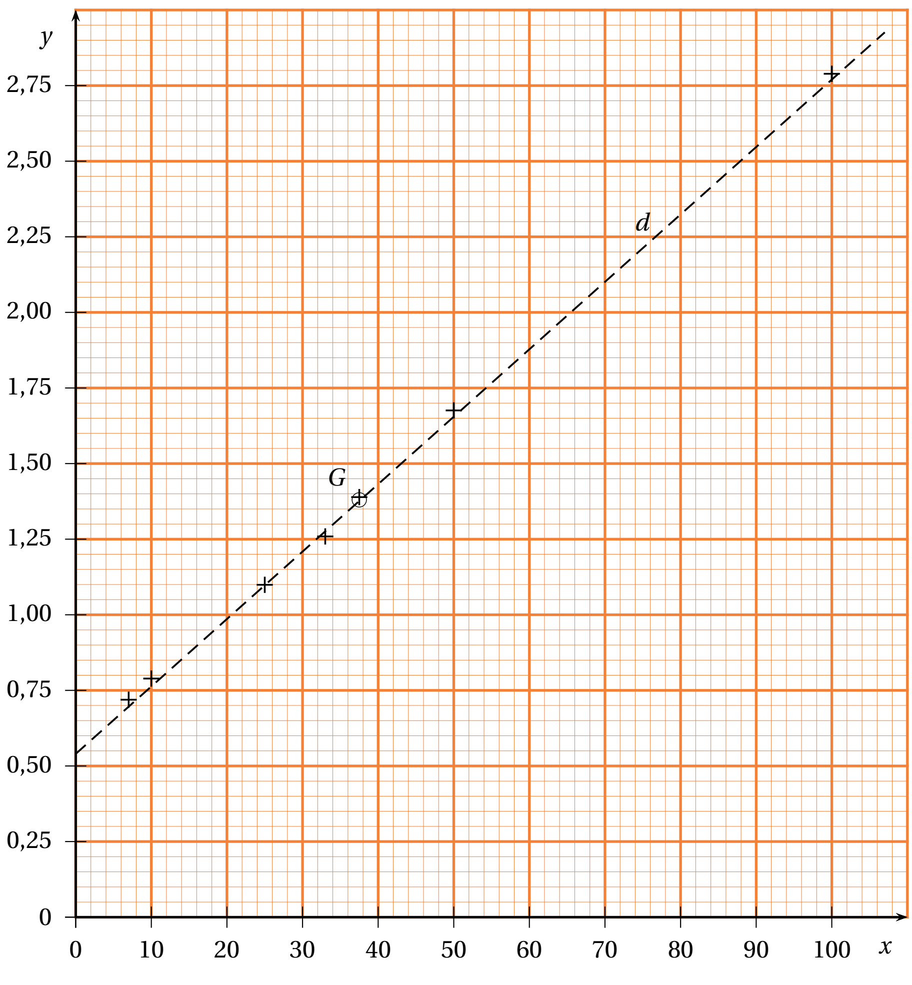
Une série de cinétiques enzymatiques a été réalisée avec des conditions physico-chimiques identiques (pH, température,...). Pour chaque concentration initiale en saccharose S_i, on a mesuré la vitesse initiale V_i de la réaction.

Rang de la mesure	1	2	3	4	5	6
S_i (mol.dm^{-3})	1×10^{-2}	2×10^{-2}	3×10^{-2}	4×10^{-2}	10×10^{-2}	15×10^{-2}
V_i (μ_i.mol.mn^{-1})	0,36	0,6	0,8	0,92	1,28	1,41

On pose : $X_i = \dfrac{1}{S_i}$ et $Y_i = \dfrac{1}{V_i}$.

1. En gras les valeurs complétées du tableau pour obtenir le nuage de points.

Rang de la mesure	1	2	3	4	5	6
X_i	**100**	**50**	33	**25**	**10**	7
Y_i	2,78	**1,67**	**1,25**	1,09	**0,78**	**0,71**



2. Les coordonnées $(x_G ; y_G)$ du point moyen G sont :

$$x_G = \frac{100+50+33+25+10+7}{6} = \frac{225}{6} = 37,5$$
$$y_G = \frac{2,78+1,67+1,25+1,09+0,78+0,71}{6} = \frac{8,28}{6} = 1,38$$

Ainsi G a pour coordonnées : $G(37,5 ; 1,38)$.

3. **a.** La droite d cherchée a une équation réduite de la forme : $y = mx + p$ avec : $m = 2,23 \times 10^{-2}$. De plus G appartient à d donc ses coordonnées vérifient $y_G = mx_G + p$. On en déduit p :

$$\begin{aligned} p &= y_G - mx_G \\ &= 1,38 - 2,23 \times 10^{-2} \times 37,5 \\ &\approx 0,54. \end{aligned}$$

b. La droite d est tracée sur le graphique précédent.

4. **a.** $\frac{1}{S} = \frac{1}{20\times 10^{-2}} = 5$

b. Pour estimer V on utilise la droite d. Le point d'abscisse $x = 5$ a pour ordonnée $\frac{1}{V}$ où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} &= m \times 5 + p \\ &= 2,23 \times 10^{-2} \times 5 + 0,54 \quad \text{donc :} \\ V &= \frac{1}{2,23 \times 10^{-2} \times 5 + 0,54} \\ &\approx 1,53 \end{aligned}$$

5. L'équation de d nous donne la relation :

$$\frac{1}{V} = 2,23 \times 10^{-2} \times \frac{1}{S} + 0,54$$

La formule donnée dans l'énoncé nous donne une relation affine de la même forme :

$$\frac{1}{V} = \frac{K}{V_{max}} \times \frac{1}{S} + \frac{1}{V_{max}}$$

a. En identifiant les ordonnées à l'origine, on obtient $\frac{1}{V_{max}} = 0,54$ et donc $V_{max} = \frac{1}{0,54}$
D'où : $V_{max} \approx 1,85$

b. En identifiant les coefficients directeurs, on obtient $\frac{K}{V_{max}} = 2,23 \times 10^{-2}$. On en déduit K :

$$\begin{aligned} K &= V_{max} \times 2,23 \times 10^{-2} \\ K &\approx 1,85 \times 2,23 \times 10^{-2} \\ K &\approx 0,041 \end{aligned}$$

Exercice n° 2 (*10 points*)

Partie A.

$$f(x) = 4 - \frac{1}{x+2} \qquad g(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{-x} + 4 \qquad h(x) = 3 + \ln(x+1) \qquad i(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} + 4$$

1. Dérivons ces fonctions.

• Calcul de $f'(x)$: On a la formule $(1/v)' = -v'/v^2$ avec $v(x) = x+2$ et donc $v'(x) = 1$ on obtient :

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

• Calcul de $g'(x)$: On a la formule $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$. Posons $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Avec $u(x) = -x$ on en déduit que $v'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}$. De plus $g(x)$ est un produit, or $(uv)' = u'v + uv'$. Avec $u(x) = x-1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$, on obtient :

$$g'(x) = 1\times\mathrm{e}^{-x} + (x-1)\times\left(-\,\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}(1-(x-1)) = (-x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

• Calcul de $h'(x)$: On a la formule $(\ln(u))' = u'/u$. Avec $u(x) = x+1$ on en déduit que :

$$h'(x) = \frac{1}{x+1}$$

• Calcul de $i'(x)$: On a vu que si $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$, alors $v'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}$, d'où $i'(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
Finalement :

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \qquad g'(x) = (-x+2)\,\mathrm{e}^{-x} \qquad h'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad i'(x) = \mathrm{e}^{-x}}$$

On remplit ainsi la dernière colonne du tableau. ① : $f'(0) = \frac{1}{2^2} = 0,25$. ③ : $h'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$

Fonction	Valeur en 0	Limite en $+\infty$	Nombre dérivé en 0
f	3,5	4	0,25 (*)①
g	3	4 (*)②	2
h	0	$+\infty$	1 (*)③
i	4	4 (*)④	1

Il reste à étudier les limites :
② : $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + 4 = \frac{x}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x} + 4$. Or on sait que la limite en $+\infty$ de e^x et de $\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ est $+\infty$ (par croissance comparée pour cette dernière). Ainsi leurs inverses tendent vers 0 en $+\infty$. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} + 4 = 0+0+4 = 4$$

④ : $i(x) = -\frac{1}{\mathrm{e}^x} + 4$ et, on a déja vu que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$, d'où le résultat.

2. Traduisons les données pour la fonction F dont on a la courbe $\mathscr{C}$:
- ☞ Le point A de coordonnées (0;3) appartient à $\mathscr{C}$: $\boxed{F(0) = 3}$
- ☞ la droite Δ d'équation $y = 4$ est asymptote à $\mathscr{C}$: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 4}$
- ☞ La droite (AB) où B est le point de coordonnées (1;5) est tangente à $\mathscr{C}$ en A :
  Le coefficient directeur de (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{1-0} = 2$. On veut donc $\boxed{F'(0) = 2}$

La fonction g vérifie ces trois conditions, et c'est la seule parmi les quatre proposées.

Partie B.

1. On a trouvé $g'(x) = (-x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$. Or e^X est strictement positif quel que soit le réel X, donc $g'(x)$ est du signe de $(-x+2)$, soit positif sur $]-\infty\,;\,2]$, nul en 2 et négatif sur $[2\,;\,+\infty[$.

2. On en déduit les variations de g sur $\mathbb{R}^+$:

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	3	↗	$4+\mathrm{e}^{-2}$	↘	4