∽ Corrigé du baccalauréat STL Biochimie Génie biologique ∾ juin 2012

Coefficient 2 — Durée 2 heures

La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 — **8 points**

Une association de consommateurs réalise une enquête auprès d'une population à risque de 800 personnes pour tester l'efficacité d'un traitement sur l'obésité. Voici les informations qu'elle recueille :

- 500 personnes ont suivi le traitement;
- 530 personnes sont obèses et parmi celles-ci, 350 ont suivi le traitement.

1. Complétons le tableau suivant

	Personnes obèses	Personnes non obèses	Total
Personnes ayant suivi le traitement	350	150	500
Personnes n'ayant pas suivi le traitement	180	120	300
Total	530	270	800

Dans les questions suivantes, les résultats seront donnés **sous forme décimale exacte.**

2. On choisit au hasard une personne parmi les 800 dans la population à risque. L'univers est l'ensemble des 800 personnes d'une population à risque et la loi mise sur cet univers est la loi équirépartie. Pour un évènement A :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

a. Calculons la probabilité de l'évènement A : « la personne est obèse ». Il y a 530 personnes obèses. Par conséquent

$$p(A) = \frac{530}{800} = 0{,}6625.$$

b. Calculons la probabilité de l'évènement B : « la personne a suivi le traitement ». Il y a 500 personnes qui ont suivi le traitement donc

$$p(B) = \frac{500}{800} = 0{,}625$$

3. On considère les évènements suivants :
$A \cap B$; $A \cup B$; $A \cap \overline{B}$; $\overline{A} \cap \overline{B}$ où $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont les évènements contraires respectifs de A et B.
Donnons une définition de chacun de ces évènements puis calculons leur probabilité.

$A \cap B$ est l'évènement :« la personne est obèse et a suivi le traitement ».

$$p(A \cap B) = \frac{350}{800} = 0{,}4375.$$

$A\cup B$ est l'évènement :« la personne est obèse ou a suivi le traitement ».

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0{,}6625+0{,}625-0{,}4375=0{,}85.$$

$A\cap\overline{B}$ est l'évènement :« la personne est obèse et n'a pas suivi le traitement ».

$$p\left(A\cap\overline{B}\right)=\frac{180}{800}=0{,}225.$$

$\overline{A}\cap\overline{B}$ est l'évènement :« la personne n'est pas obèse et n'a pas suivi le traitement ».

$$p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\frac{120}{800}=0{,}15.$$

Remarque $\overline{A}\cap\overline{B}$ est le complémentaire de $A\cup B$; $p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=1-p(A\cup B)=1-0{,}85=0{,}15$

4. **a.** On choisit au hasard une personne ayant suivi le traitement, calculons la probabilité p_1 de l'évènement :
« la personne est obèse ».

$$p_1=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{0{,}4375}{0{,}625}=0{,}7.$$

b. On choisit au hasard une personne n'ayant pas suivi le traitement, calculons la probabilité p_2 de l'évènement : « la personne est obèse ».

$$p_2=\frac{p\left(A\cap\overline{B}\right)}{p\left(\overline{B}\right)}=\frac{0{,}225}{0{,}375}=0{,}6.$$

c. L'efficacité de ce traitement est très faible puisque p_1 et p_2 sont proches.

EXERCICE 2 **12 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Questionnaire à choix multiples

Sur **la feuille annexe**, dans le plan rapporté à un repère, on donne la courbe ($\mathscr{C}$) représentative d'une fonction f définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. On sait que :

- La courbe ($\mathscr{C}$) passe par les points A (100 ; 17,6) et B (75; 15).
- La droite (d) est la tangente à cette courbe au point A.
- La courbe ($\mathscr{C}$) admet la droite d'équation $y=18$ pour asymptote.

1. La fonction f vérifie :

a. $\boxed{f(100)=17{,}6}$ **b.** $\cancel{f(17{,}6)=100}$ **c.** $\cancel{f(15)=75}$.

La courbe ($\mathscr{C}$) passe par le point A (100 ; 17,6)

2. La fonction dérivée f' de f vérifie :

a. $\cancel{f'(50)<0}$ **b.** $\boxed{f'(50)>0}$ **c.** ~~signe de $f'(50)$ inconnu~~

f est définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par conséquent pour tout x $f'(x)>0$.

3. La droite (d) a une équation de la forme $y=mt+14{,}3$.
Son coefficient directeur m est égal à :

a. ~~30,3~~ **b.** ~~−3,2~~ **c.** $\boxed{0,033}$

$m = \frac{17,6-14,3}{100-0}$

4. La fonction f vérifie :

a. $\cancel{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty}$ **b.** $\cancel{\lim\limits_{t\to 18} f(t) = +\infty}$ **c.** $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 18}$

La courbe ($\mathscr{C}$) admet la droite d'équation $y = 18$ pour asymptote.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{18}{1+170\mathrm{e}^{-0,09t}}$.

On appelle ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative.

1. $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 18$. Car $\lim\limits_{t\to+\infty} 170\mathrm{e}^{-0,09t} = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} 1+170\mathrm{e}^{-0,09t} = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{18}{1} = 18$. Il en résulte que la courbe ($\mathscr{C}$) admet la droite d'équation $y = 18$ pour asymptote.

2. Pour tout nombre t positif, déterminons la fonction dérivée de f.

$$f'(t) = 18 \times \frac{-170\times(-0.09)\mathrm{e}^{-0,09t}}{(1+170\mathrm{e}^{-0,09t})^2} = \frac{275,4\mathrm{e}^{-0,09t}}{(1+170\mathrm{e}^{-0,09t})^2}$$

3. $f'(t) > 0$ pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$ comme somme, produit et quotient de nombres strictement positifs.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I. Pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

4. $f(0) = \dfrac{18}{1+170\mathrm{e}^{-0,09\times 0}} = \dfrac{18}{171} \approx 0,1$.

5. Dressons le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

t	0		$+\infty$
f'		$+$	
Variations de f	$\frac{18}{171}$	$\nearrow$	18

6. $f'(100) = \dfrac{275,4\mathrm{e}^{-0.09\times 100}}{1+170\mathrm{e}^{-0,09\times 100}} = \dfrac{275,4\mathrm{e}^{-9}}{1+170\mathrm{e}^{-9}} \approx 0,0336$.

Ce nombre correspond au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 100 à la courbe représentative de f, ($\mathscr{C}$) .

Nous retrouvons bien la réponse à la question 3 du QCM.

Partie C : **Application.**

On admet que :

- La fonction f, définie dans la partie B, modélise le nombre d'insectes d'une population de tribolions bruns de la farine (ou tribolium confusum) étudiée, pendant 200 jours, dans une petite quantité de farine. Cet insecte altère la qualité de la farine et la fait notamment tourner au gris lorsqu'il s'y trouve en assez grand nombre.
- La variable t représente le nombre de jours de l'étude et $f(t)$ le nombre de ces insectes **exprimé en centaines**.
- La courbe représentative de cette fonction est celle donnée en annexe.

1. Déterminons la population initiale ($t = 0$). Nous avons calculé à la question précédente $f(0)$
Donc à l'instant initial, il y avait environ 10 tribolions

Déterminons la population finale ($t = 200$) de ces insectes. Calculons $f(200)$.

$f(200) = \dfrac{18}{1+170\mathrm{e}^{-0,09\times 200}} = \dfrac{18}{1+170\mathrm{e}^{-18}} \approx 17,99.$

Au bout de 200 jours, la population s'élevait à environ 1 800 tribolions.

2. La farine a visiblement tourné au gris dès le 75ᵉ jour. Calculons $f(75)$.

$f(75) = \dfrac{18}{1+170\mathrm{e}^{-0,09\times 75}} = \dfrac{18}{1+170\mathrm{e}^{-6,75}} \approx 15,01$

Au bout de 75 jours, la population s'élevait à environ 1 500 tribolions.

3. **a.** Déterminons, le jour à partir duquel la population de tribolions bruns avait atteint les 900 individus. Pour ce faire, résolvons $f(t) = 9$

$$\begin{aligned}
\frac{18}{1+170\mathrm{e}^{-0,09t}} &= 9\\
18 &= 9(1+170\mathrm{e}^{-0,09t})\\
2 &= 1+170\mathrm{e}^{-0,09t}\\
1 &= 170\mathrm{e}^{-0,09t}\\
\mathrm{e}^{0,09t} &= 170\\
\ln(\mathrm{e}^{0,09t}) &= \ln 170\\
0,09t &= \ln 170\\
t &= \frac{\ln 170}{0,09}\\
t &\approx 57,06
\end{aligned}$$

À partir du 57ᵉ jour, la population de tribolions bruns a atteint les 900 individus.

b. Vérification graphique, voir annexe

ANNEXE à rendre avec la copie