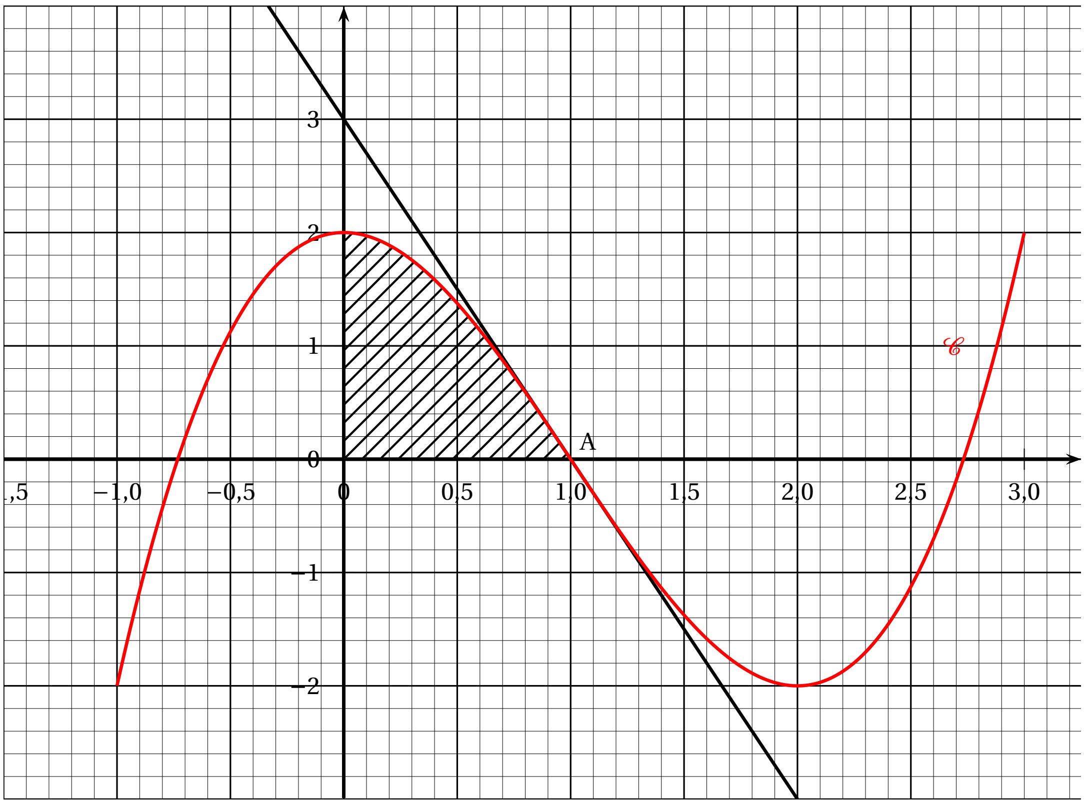
Corrigé du baccalauréat STL Biotechnologies

Métropole – La Réunion – 8 septembre 2020

Exercice 1 — 4 points

Pour chacune des quatre affirmations de l'exercice, déterminer si elle est vraie ou fausse, puis justifier de manière claire et concise la réponse donnée.

Dans tout l'exercice, on considère la fonction f définie sur $[-1\,;\,3]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
La tangente à $\mathscr{C}$ au point A$(1\,;\,0)$ passe par le point de coordonnées $(0\,;\,3)$.
La fonction F désigne une primitive de la fonction f sur $[-1\,;\,3]$.



1. La courbe a trois points communs avec l'axe des abscisses (en $x \approx -0,7$, $x = 1$, $x \approx 2,7$) : l'affirmation est vraie.
2. Sur l'intervalle $[-1\,;\,3]$, il ne semble y avoir que 2 tangentes horizontales : l'affirmation est fausse.
3. L'unité d'aire correspond à deux carreaux : l'encadrement semble correct ; l'affirmation est vraie.
4. On a sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, $F'(x) = f(x)$; or sur cet intervalle on a $f(x) \geqslant 0$. la dérivée de F est positive, donc F est bien croissante sur $[0\,;\,1]$. l'affirmation est vraie.

Exercice 2 6 points

Les deux parties sont indépendantes.

Une agence de sondage s'est vu confier par le ministère une enquête sur la proportion de personnes consommant du café quotidiennement selon leur âge.

Partie A

Les résultats sur un échantillon de personnes sont donnés ci-dessous :

Tranche d'âge	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[
x_i	25	35	45	55	65
y_i	42	50	65	72	84

Pour chaque tranche d'âge, on note x_i le centre de la classe et y_i le taux (en pourcentage) de personnes consommant quotidiennement du café.

1. Voir l'annexe.
2. **a.** En arrondissant les coefficients au centième, la calculatrice donne : $y = 1,06x + 14,9$.
   b. Voir l'annexe
3. Avec $x = 85$, on obtient avec le modèle de la droite d'ajustement :
   $y = 1,06 \times 85 + 14,9 = 90,1 + 14,9 = 105$ (%) : ce résultat est stupide un pourcentage ne pouvant dépasser 100. Le modèle n'est pas adapté.

Partie B

1. On a $c_1 = 9,564 \times \left(1 + \dfrac{1,3}{100}\right) = 9,564 \times (1 + 0,013) = 9,564 \times 1,013 = 9,68833 \approx 9,688$ au millième près.
2. Ajouter 1,3 %, c'est comme on l'a vu multiplier par 1,013. On a donc quel que soit n supérieur ou égal à 1 : $u_{n+1} = 1,013u_n$: la suite (c_n) est une suite géométrique de premier terme $c_1 = 9,564$ et de raison $q = 1,013$.
3. **a.** On sait que pour $n \geqslant 1$, on a $c_n = c_1 \times q^{n-1}$, soit ici $c_n = 9,564 \times 1,013^{n-1}$.
   b. 2032 correspond à $n = 15$ et $c_{15} = 9,564 \times 1,013^{15-1} \approx 11,4597$, soit 11,460 au millième près.
4. Voir l'algorithme complété à la fin.
   La consommation dépassera 16 pour $N = 40$, soit en 2058.

Exercice 3 5 points

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. La calculatrice donne $P(4,77 \leqslant B \leqslant 5,23) \approx 0,996$.
2. On a $P(B \leqslant 4,8) \approx 0,0062$, d'où
   $P(4,8 \leqslant B) = 1 - P(B \leqslant 4,8) \approx 1 - 0,0062 \approx 0,9938$.
   On a $0,9938 > 0,99 = \dfrac{99}{100}$: le responsable a raison.
3. la masse moyenne d'un paquet de 200 bonbons est : $200 \times (5 + 1) + 4 = 1\,204$ (g).

Partie B

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,004$.
On a $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \approx 0,4486 + 0,3603 + 0,1440 + 0,0382 \approx 0,991$. Donc un peu plus de 99 % de chances que le paquet soit accepté.

Partie C

1. • Intervalle de confiance pour l'achat avec emballage individuel :
   $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[\dfrac{735}{800}-\dfrac{1}{\sqrt{800}}\ ;\ \dfrac{735}{800}+\dfrac{1}{\sqrt{800}}\right]\approx[0,883\ ;\ 0,954]$;
   • Intervalle de confiance pour l'achat sans emballage individuel :
   $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[\dfrac{720}{800}-\dfrac{1}{\sqrt{800}}\ ;\ \dfrac{20}{800}+\dfrac{1}{\sqrt{800}}\right]\approx[0,865\ ;\ 0,935]$.
2. Le deuxième intervalle de confiance est inclus dans le premier : la suppression de l'emballage individuel n'aura pas d'influence sur les ventes.

Exercice 4 5 points

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Un bassin d'eau contenant 50 000 m^3 a subi une pollution aux nitrates. Des mesures ont permis d'estimer qu'à l'instant t_0 la concentration en nitrate est de 10 000 mg/L.
Un travail de dépollution est mis en œuvre et on note $f(t)$ la concentration en nitrate dans l'eau, en mg/L, à l'instant t exprimé en heure, en prenant $t_0=0$.

Partie A

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle E : $y'+0,2y=8$ sur $[0\ ;\ +\infty[$, où y est une fonction de la variable t définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. L'équation sans second membre $y'+0,2y=0$ a pour solution générale $t\longmapsto K\mathrm{e}^{-0,2t}$ où K est un réel quelconque.

   L'équation E a pour solution particulière la fonction $x\longmapsto\dfrac{8}{0,2}$ soit la fonction $x\longmapsto 40$.

   Donc la solution générale f de l'équation E est définie par $f(x)=K\mathrm{e}^{-0,2t}+40$ où K est un réel quelconque.
2. **a.** À l'instant $t_0=0$, la concentration en nitrate est de 10 000 mg/L, donc $f(0)=10000$.

   b. $f(0)=10000 \iff K\mathrm{e}^{0}+40=10000 \iff K=9960$.
   Donc la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t)=9960\mathrm{e}^{-0,2t}+40$.

Partie B

On admet dans cette partie que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f(t)=9960\mathrm{e}^{-0,2t}+40$.

1. **a.** $f'(x)=9960\times(-0,2)\mathrm{e}^{-0,2t}+0=-1992\mathrm{e}^{-0,2t}$.

   b. Pour tout t, $\mathrm{e}^{-0,2t}>0$, donc $f'(t)<0$ et donc la concentration de polluant est décroissante dans le temps.
2. Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants, qui pourront être utilisés sans justification :

$f(t)=9960\mathrm{e}^{-0,2t}+40$ $\rightarrow 9960\mathrm{e}^{-0,2t}+40$
Limite $f(t)$, $+\infty$ $\rightarrow 40$

   D'après le logiciel de calcul formel, la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 40.
   Cela signifie que la concentration en nitrates va tendre vers 40 mg/L.

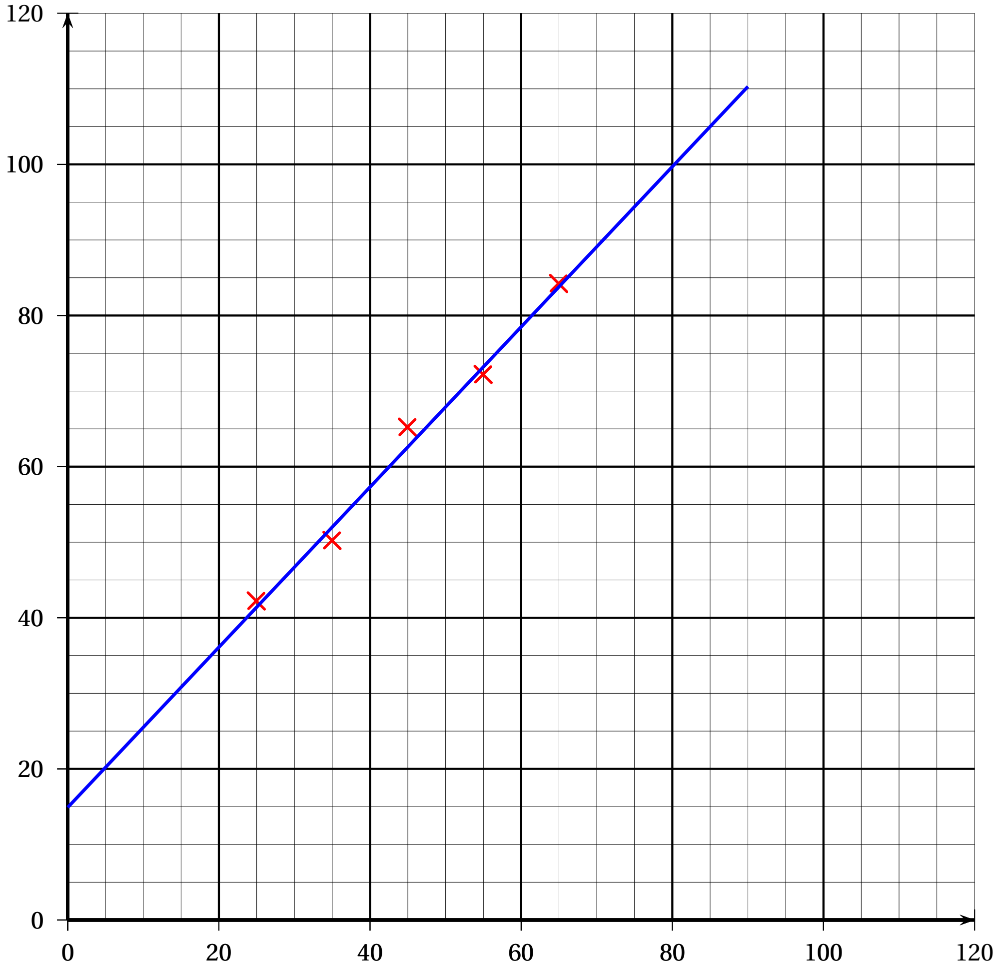
3. Une eau est considérée comme potable lorsque la concentration en nitrate est inférieure à 50 mg/L.
On cherche donc t pour que $f(t) < 50$; on résout cette inéquation :
$f(t) < 50 \iff 9\,960\,\text{e}^{-0,2t} + 40 < 50 \iff \text{e}^{-0,2t} < \dfrac{50-40}{9\,960} \iff -0,2t < \ln\left(\dfrac{1}{996}\right)$
$\iff t > \dfrac{1}{-0,2}\ln\left(\dfrac{1}{996}\right) \iff t > 34,519$
Or $0,519 \times 60 \approx 31,1$ donc le temps minimum pour atteindre une concentration inférieur à 50 mg/L est de 34 h 32 min.

Annexe

À rendre avec la copie

Exercice 2

Annexe 1



Annexe 2

$N \leftarrow 0$
$C \leftarrow 9,564$
Tant que $C \leqslant 16$
    $N \leftarrow N+1$
    $C \leftarrow C*1,013$
Fin Tant que
$N \leftarrow 2018+N$