# ∽ Corrigé du baccalauréat STL Métropole juin 2005 ∾<br>Physique de laboratoire et de procédés industriels

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 4

**EXERCICE 1** **5 points**

**1.** Le joueur perd quand il reçoit 1 ou 2 euros. Il y a $4+3=7$ tirages où il perd sur 10 tirages possibles équiprobables donc : $p_1=\dfrac{7}{10}=0,7$.

Le joueur gagne quand il reçoit 5 (2 tirages) ou 10 euros (1 tirage).

Donc $p_2=\dfrac{3}{10}=0,3$.

On a bien $p_1+p_2=1$.

**2. a.** On peut rajouter une ligne « gain », au tableau de l'énoncé, dont les nombres sont obtenus en retirant la mise de 4 euros dans chaque cas.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Nombre inscrit | 1 | 2 | 5 | 100 |
| Nombre de boules | 4 | 3 | 2 | 1 |
| Gain en euros | $-3$ | $-2$ | 1 | 6 |

L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est : $\{-3,\ -2,\ 1,\ 6\}$.

**b.** À l'aide du tableau précédent, on obtient : $p(X=-3)=\dfrac{4}{10}=0,4$ ;

$p(X=-2)=\dfrac{3}{10}=0,3\quad p(X=1)=\dfrac{2}{10}=0,2\quad ; p(X=6)=\dfrac{1}{10}=0,1$.

Le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donc :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Valeurs de X : $x_i$ | $-J$ | $-2$ | 1 | 6 |
| $p_i=P(\mathrm{X}=x_i)$ | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

**c.** L'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X est alors :

$\mathrm{E(X)}=\sum p_i\times x_i=-3\times0,4-2\times0,3+1\times0,2+6\times0,1=-1,2-0,6+0,2+0,6=-1$.

Ceci signifie qu'en moyenne on perdra 1 euro par partie.

**3.** On change le nombre inscrit sur une seule boule portant le nombre 1. On note $x$ ce nombre. Le tableau du 2. a. s'écrit alors :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre inscrit | $x$ | 1 | 2 | 5 | 10 |
| Nombre de boules | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| Gain en euros | $x-4$ | $-3$ | $-2$ | 1 | 6 |

La loi de probabilité de la variable aléatoire X devient :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Valeurs de X : $x_i$ | $x-4$ | $-3$ | $-2$ | 1 | 6 |
| $p_i=P(\mathrm{X}=x_i)$ | 0,1 | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

L'espérance mathématique de X devient : $\mathrm{E(X)}=\sum p_i\times x_i=$

$0,1(x-4)+(-3)(0,3)+(-2)(0,3)+(1)(0,2)+(6)(0,1)=$

$0,1x-0,4-0,9-0,6+0,2+0,6=0,1x-1,1$.

Donc $\mathrm{E(X)}=0\iff 0,1x-1,1=0\iff 0,1x=1,1\iff x=11$.

Conclusion : Le jeu est équitable si la boule porte le nombre 11.

**EXERCICE 2** **6 points**

1. **a.** Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$(z+2)\left(az^2+bz+c\right)=z^3-2z^2+16 \iff$
$az^3+bz^2+cz+2az^2+2bz+2c=z^3-2z^2+16 \iff$,
$az^3+(2a+b)z^2+(2b+c)z+2c=z^3-2z^2+16$.
Dans C, deux polynômes égaux pour tout $z$ ont les mêmes coefficients pour les termes de même degré, d'où :
$a=1,\ 2a+b=-2,\ 2b+c=0$ et $2c=16$.
On en déduit $a=1,\ c=8$ puis $2+b=-2 \iff b=-4$ et $-8+8=0$.
Conclusion : quel que soit $z \in \mathbb{C}, \infty P(z)=(z+2)\left(z^2-4z+8\right)$.

**b.** $P(z)=0 \iff (z+2)\left(z^2-4z+8\right)=0 \iff \left\{\begin{array}{l} z+2=0 \\ z^2-4z+8 \end{array}\right.$
La première équation a pour solution $-2$.
Pour la seconde $\Delta=16-32=16=(4\mathrm{i})^2$. Le discriminant étant négatif, l'équation a deux solutions complexes conjuguées :
$$\frac{4+4\mathrm{i}}{2}=2+2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad 2-2\mathrm{i}$$
Finalement l'équation a trois solutions : $-2,\ 2+2\mathrm{i},\ 2-2\mathrm{i}$.

2. **a.** On a $|z_{\mathrm{B}}|^2=2^2+2^2=8=\left(2\sqrt{2}\right)^2$, donc $|z_{\mathrm{B}}|=2\sqrt{2}$.
On peut donc écrire : $z_{\mathrm{B}}=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (écriture trigonométrique) et finalement $z_{\mathrm{B}}=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$ (écriture exponentielle).
On sait que $z_{\mathrm{A}}=\overline{z_{\mathrm{B}}}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$.

**b.** Les points A et B se placent facilement. Voir plus bas.

**c.** On a $|z_{\mathrm{B}}|=\mathrm{OB}=2\sqrt{2}=|z_{\mathrm{A}}|=\mathrm{OA}$. le triangle OAB est isocèle en O.
D'autre part : $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$. Le triangle OAB est donc rectangle isocèle en O.

3. **a.** La transformation T est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

**b.** On sait que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Avec $z_{\mathrm{A}'}$ affixe du point A′, on a :
$z_{\mathrm{A}'}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}z_{\mathrm{A}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\times 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{12}\right)}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$.
On a également :
$z_{\mathrm{A}'}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}z_{\mathrm{A}}=\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(2-2\mathrm{i})=1-\mathrm{i}+\mathrm{i}\sqrt{3}+\sqrt{3}=1+\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)$

**c.** En identifiant les deux écritures précédentes on obtient :
$$\left\{\begin{array}{l} \cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

**PROBLÈME** **9 points**

**Partie A**

1. **a.** On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$, d'où par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

   **b.** En développant :

   $f(x)=\left(x^2+2x+1\right)\mathrm{e}^{-x}=x^2\mathrm{e}^{-x}+2x\mathrm{e}^{-x}b+\mathrm{e}^{-x}=x^2\mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=1$ et l'on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n\mathrm{e}^{-n}=0$ (avec $n$ naturel), d'où par produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

   Graphiquement de résultat signifie que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

2. **a.** En reprenant l'énoncé et en appliquant la formule de la dérivée d'un produit, on obtient :
   $f'(x)=2(x+1)\mathrm{e}^{-x}-(x+1)^2\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}\left(2x+2-x^2-2x-1\right)=\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   **b.** Comme $\mathrm{e}^{-x}>0$ quel que soit $x$, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $1-x^2=(1+x)(1-x)$ négatif sauf entre ses racines $-1$ et 1. Le signe de la dérivée induit les variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $4\mathrm{e}^{-1}$ | $\searrow$ | $0$ |

3. Une équation de $\mathscr{T}$ est $y=f(0)+(x-0)f'(0)$ donc ici $y=1+x\times1\iff y=x+1$.

4. **a.** Soit $d$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x)=f(x)-(x+1)=$
   $(x+1)^2\mathrm{e}^x-(x+1)=\dfrac{(x+1)^2}{\mathrm{e}^x}-\dfrac{(x+1)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{(x+1)\left[(x+1)-\mathrm{e}^x\right]}{\mathrm{e}^x}=$
   $(x+1)\mathrm{e}^{-x}\left(x+1-\mathrm{e}^x\right)$, soit en posant $g(x)=x+1-\mathrm{e}^x$,
   $f(x)-(x+1)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}g(x)$.

   **b.** $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=1-\mathrm{e}^x$.
   On a $g'(x)=0\iff 1-\mathrm{e}^x=0\iff 1=\mathrm{e}^x$ soit par croissance de la fonction ln : $\ln 1=\ln\left(\mathrm{e}^x\right)\iff 0=x$.
   De même $g'(x)>0\iff 1-\mathrm{e}^x>0\iff 1>\mathrm{e}^x$ soit par croissance de la fonction ln : $\ln 1>\ln\left(\mathrm{e}^x\right)\iff 0>x$.
   Enfin $g'(x)<0\iff x>0$.

   **c.** Des résultats précédents résultent les variations de $g$, avec
   $g(0)=0+1-1=0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | |

   **d.** De ce tableau résulte que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)\leqslant 0$. Comme $\mathrm{e}^{-x}>0$, quel que soit $x$, il résulte que le signe de $[f(x)-(x+1)]$ est l'opposé du signe de $(x+1)$, soit :
   – si $x<-1$, $f(x)-(x+1)>0\iff f(x)>x+1$, ce qui graphiquement signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite $\mathscr{T}$ ;
   – si $x>-1$, $f(x)-(x+1)<0\iff f(x)<x+1$, ce qui graphiquement signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de la droite $\mathscr{T}$.

**5.** Tableau de valeurs :

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $-0,5$ | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 7,39 | 0 | 0,41 | 1 | 1,36 | 1,47 | 1,22 | 0,80 | 0,46 | 0,12 |

Figure à la fin.

**Partie B**

**1.** Pour montrer que la fonction $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que, pour tout réel $x$, $F'(x) = f(x)$.
Or quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = (-2x-4)\mathrm{e}^{-x} - \left(-x^2-4x-5\right)\mathrm{e}^{-x}$
$= \left(-2x-4+x^2+4x+5\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(x^2+2x+1\right)\mathrm{e}^{-x} = (x+1)^2\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
Conclusion : $F$ est une primitive de $f$.

**2.** On sait que sur $[0\,;3]$, $f(x) > 0$, donc l'aire de la surface est en unité d'aire égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^3 = F(3) - F(0) = (-9-12-5)\mathrm{e}^{-3} - (-5)\mathrm{e}^{-0} = 5 - 26\mathrm{e}^{-3}$ (u. a.).
Le repère est orthonormal et l'unité de longueur est égale à 2 cm, donc 1 u. a. $= 2 \times 2 = 4$ cm$^2$.
Donc l'aire de la surface est égale à $20 - 104\mathrm{e}^{-3}$ cm$^2$ $\approx 14,82$ cm$^2$ au centième près.