∽ Corrigé du baccalauréat STL Métropole 17 juin 2008 ∾
Physique de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice et formulaires autorisés 3 heures

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 4

EXERCICE 1 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes (les solutions seront données sous forme algébrique) : Pour la première équation $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 50 = 100 - 200 = -100 = (10\text{i})^2$.

Le discriminant est négatif : l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-(-10)+10\text{i}}{2} = 5+5\text{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 5-5\text{i}$.

Deuxième équation :

$z+2 = \text{i}z\sqrt{3}-6 \iff z\left(1-\text{i}\sqrt{3}\right) = -6-2 \iff z\left(1-\text{i}\sqrt{3}\right) = -8 \iff z = \dfrac{-8}{1-\text{i}\sqrt{3}} =$
$\dfrac{-8\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)}{\left(1-\text{i}\sqrt{3}\right)\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)} = \dfrac{-8\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)}{1+3} = -2-2\text{i}\sqrt{3}$.

2. a. On a $|z_A|^2 = 5^2+5^2 = 2\times 5^2$, donc $|z_A| = 5\sqrt{2}$.

On a donc $z_A = 5\sqrt{2}\left(\dfrac{5}{5\sqrt{2}} - \text{i}\dfrac{5}{5\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Si θ est un argument de z_A, on a $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.

L'écriture exponentielle de z_A est donc $5\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

b. Puisque $z_B = \overline{z_A}$ son écriture exponentielle est $5\sqrt{2}\text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{4}}$.

Il suit que $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{5\sqrt{2}\text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{4}}}{5\sqrt{2}\text{e}^{-\frac{\text{i}\pi}{4}}} = \dfrac{\text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{4}}}{\text{e}^{-\frac{\text{i}\pi}{4}}} = \text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{4}+\frac{\text{i}\pi}{4}} = \text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{2}} = \text{i}$.

On a donc $\dfrac{z_B}{z_A} = \text{i} \iff z_B = \text{i}z_A = \text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{2}}z_A$, ce qui montre que B est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

D'après la propriété de la rotation OA = OB, donc le triangle OAB est un triangle rectangle isocèle en O.

c. Par définition de la rotation $z_D = \text{e}^{-\frac{\text{i}\pi}{2}}$; $z_C = -\text{i}(-2-2\text{i}\sqrt{3}) = 2\text{i}-2\sqrt{3} = -2\sqrt{3}+2\text{i}$.

On a $\text{OC} = |z_C| = \left|-2-2\text{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$.

On place le point C(−2 ; −2), puis on on construit le point D sur la perpendiculaire à (OC) contenant O et sur le cercle de centre O, de rayon OC = 4 (sens indirect).

d. On a $\text{K}\left(\dfrac{5-2}{2}\ ;\ \dfrac{-5-2\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{-5-2\sqrt{3}}{2}\right)$. On a donc $z_{\overrightarrow{\text{OK}}}\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{-5-2\sqrt{3}}{2}\right)$.

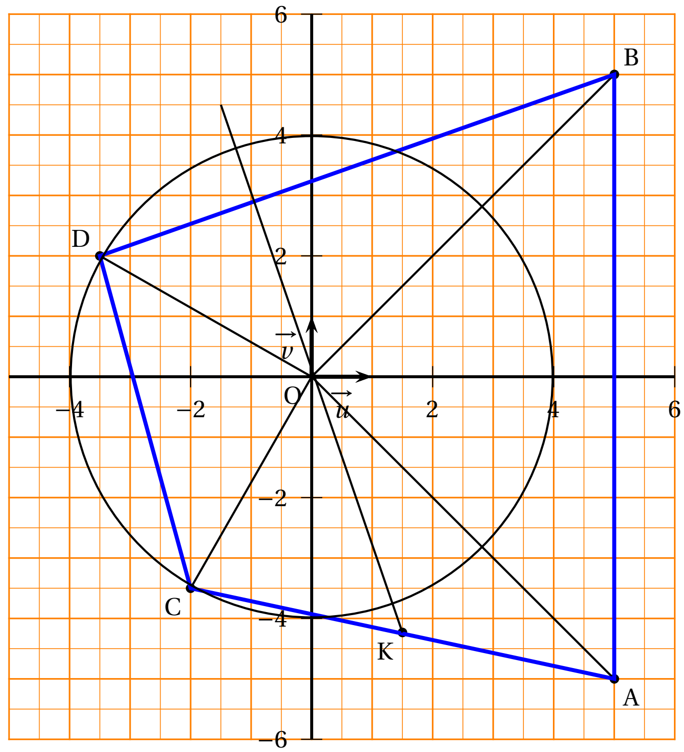
On calcule $z_{\overrightarrow{\text{DB}}}\left(5+2\sqrt{3}\ ;\ 5-2\right) = \left(5+2\sqrt{3}\ ;\ 3\right)$.

On calcule $\dfrac{z_{\overrightarrow{\text{DB}}}}{z_{\overrightarrow{\text{OK}}}} =$

$$\frac{\left(5+2\sqrt{3}\right)+3\mathrm{i}}{\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}\left(\dfrac{5}{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{\left[\left(5+2\sqrt{3}\right)+3\mathrm{i}\right)\left[\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}\left(\dfrac{5}{2}+\sqrt{3}\right)\right]}{\left[\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}\left(\dfrac{5}{2}+\sqrt{3}\right)\right]\left[\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}\left(\dfrac{5}{2}+\sqrt{3}\right)\right]} =$$
$$\frac{\frac{15}{2}+3\sqrt{3}-\frac{15}{2}-3\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(\frac{25}{2}+5\sqrt{3}+\frac{9}{2}\right)}{\frac{9}{4}+\frac{25}{4}+3+5\sqrt{3}} = \frac{\frac{34}{2}+5\sqrt{3}}{\frac{23}{2}+5\sqrt{3}}\mathrm{i}.$$

On conclut que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OK}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{DB}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{\mathrm{DB}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{OK}}}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui montre que les vecteurs sont orthogonaux.

Les droites (OK) et (DB) sont perpendiculaires.



EXERCICE 2 **4 points**

1. (E) s'écrit $y''+\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)^2=0$, équation différentielle du second ordre de la forme $y''+\omega^2 y=0$, avec $\omega=\dfrac{3\pi}{4}$.

   On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation sont de la forme $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$, donc ici $f(x) = A\cos\dfrac{3\pi}{4}x + B\sin\dfrac{3\pi}{4}x$.

2. On a $f'(x) = -\dfrac{3\pi}{4}\sin\dfrac{3\pi}{4}x + \dfrac{3\pi}{4}\cos\dfrac{3\pi}{4}x$.

   La solution particulière vérifie donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(4) & = & -\sqrt{3}\\ f'\left(\dfrac{4}{3}\right) & = & -\dfrac{3\pi}{4}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A\cos3\pi + B\sin3\pi & = & -\sqrt{3}\\ -\dfrac{3\pi}{4}\sin\pi+\dfrac{3\pi}{4}\cos\pi & = & -\dfrac{3\pi}{4}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -A & = & -\sqrt{3}\\ -\dfrac{3\pi}{4}B & = & -\dfrac{3\pi}{4}\end{array}\right.$$

$\iff \begin{cases} A &= \sqrt{3} \\ B &= 1 \end{cases}$

On a donc $f(x) = \sqrt{3}\cos\dfrac{3\pi}{4}x + \sin\dfrac{3\pi}{4}x$.

3. En développant (avec la formule $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$), on obtient :

$2\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}x\cos\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{3\pi}{4}x\sin\dfrac{\pi}{6}\right) =$

$2\cos\dfrac{3\pi}{4}x \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2\sin\dfrac{3\pi}{4}x \times \dfrac{1}{2} = \sqrt{3}\cos\dfrac{3\pi}{4}x + \sin\dfrac{3\pi}{4}x = f(x)$.

4. Calculons $f\left(x+\dfrac{8}{3}\right) = 2\cos\left[\dfrac{3\pi}{4}\left(x+\dfrac{8}{3}\right) - \dfrac{\pi}{6}\right] = \cos\left(\dfrac{3\pi x}{4} + 2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\dfrac{3\pi x}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right) = f(x)$ car la fonction cosinus est 2π-périodique.

La fonction f est bien périodique de période $\dfrac{8}{3}$.

5. D'après le formulaire la valeur moyenne m sur $\left[0\,;\,\dfrac{8}{3}\right]$ de la fonction f est :

$m = \dfrac{1}{\frac{8}{3}-0}\displaystyle\int_0^{\frac{8}{3}} 2\cos\left(\dfrac{3\pi x}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{8}\left[2\times\dfrac{4}{3\pi}\sin\left(\dfrac{3\pi x}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{8}{3}} =$

$\dfrac{1}{\pi}\left[\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\times\dfrac{8}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\times 0 - \dfrac{\pi}{6}\right)\right] = \dfrac{1}{\pi}\left[\sin\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right] =$

$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

1. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$, donc $\mathrm{e}^x + 2 > 2 > 0$. Le dénominateur ne peut donc s'annuler et la fonction g somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$g'(x) = a - \dfrac{4\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+2\right) - 4\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+2\right)^2} = a - \dfrac{4\mathrm{e}^{2x} + 8\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^x+2\right)^2} = a - \dfrac{8\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+2\right)^2}$.

2. Les conditions se traduisent par :

$\begin{cases} f(\ln 2) &= \ln 2 \\ f'(\ln 2) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a\ln 2 + b - \dfrac{4\mathrm{e}^{\ln 2}}{\mathrm{e}^{\ln 2}+2} &= \ln 2 \\ a - \dfrac{8\mathrm{e}^{\ln 2}}{\left(\mathrm{e}^{\ln 2}+2\right)^2} &= 0 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} a\ln 2 + b - \dfrac{8}{4} &= \ln 2 \\ a - \dfrac{16}{4)^2} &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a\ln 2 + b - 2 &= \ln 2 \\ a - 1 &= 0 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} \ln 2 + b - 2 &= \ln 2 \\ a &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b &= 2 \\ a &= 1 \end{cases}$

On a donc : $g(x) = x + 2 - \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}$.

Partie B

1. On a $f(x) = x + 2 - \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2} = x - 2 + 2 + 2 - \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2} = x - 2 + 4 - \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2} = x - 2 + \dfrac{4\left(\mathrm{e}^x+2\right) - 4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2} =$

$x - 2 + \dfrac{4\mathrm{e}^x + 8 - 4\mathrm{e}^x}{=} x - 2 + \dfrac{8}{\mathrm{e}^x+2}$.

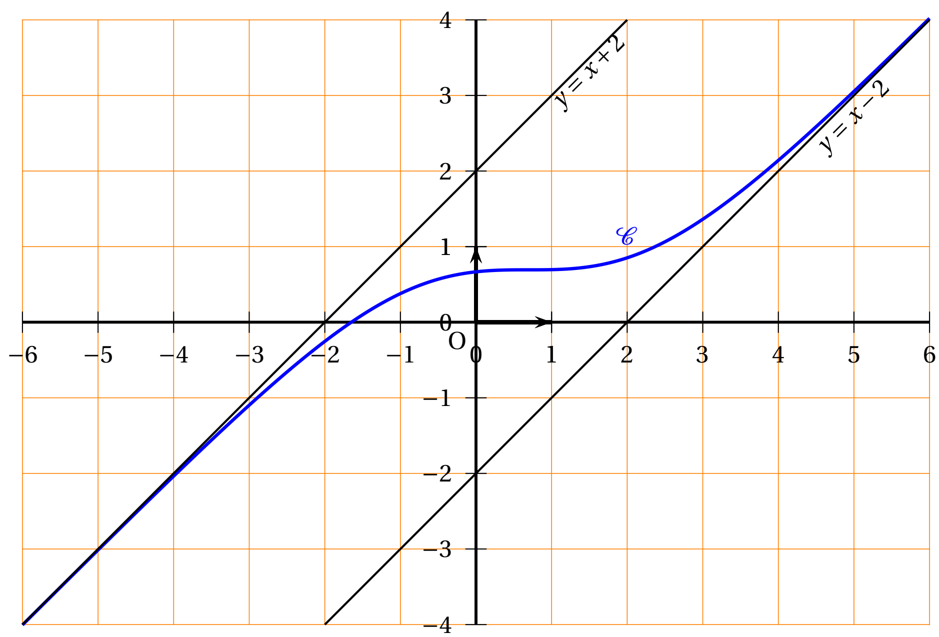
2. En utilisant l'énoncé $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8}{\mathrm{e}^x+2} = 4$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, on a finalement :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
En utilisant la deuxième écriture, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8}{\mathrm{e}^x+2} = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a finalement :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Soit d la fonction définie par : $d(x) = f(x) - (x-2) = \dfrac{8}{\mathrm{e}^x+2}$; on a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8}{\mathrm{e}^x+2} = 0$ soit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = 0$, ce qui signifie que la droite d'équation $y = x-2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.
De même, soit e la fonction définie par $e(x) = f(x) - (x+2) = -\dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}$. On a vu que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2} = 0$. Ceci montre que la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$f'(x) = 1 - \frac{8\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+2)^2} = \frac{(\mathrm{e}^x+2)^2 - 8\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+2)^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}+4+4\mathrm{e}^x-8\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+2)^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}+4-4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+2)^2} = \frac{(\mathrm{e}^x-2)^2}{(\mathrm{e}^x+2)^2} = \left(\frac{\mathrm{e}^x-2}{\mathrm{e}^x+2}\right)^2.$$

4. $f'(x)$ étant un carré est supérieur à zéro sauf si $\mathrm{e}^x - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^x = 2 \iff x = \ln 2$, auquel cas le nombre dérivé est nul et la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point est horizontale.
La fonction est donc croissante sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	4	$\nearrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

5.



Partie C

1. On remarque que $(\mathrm{e}^x+2)' = \mathrm{e}^x$, donc $h()$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = \mathrm{e}^x + 2$ et on a déjà vu que cette expression est supérieure à zéro.
   Or $\dfrac{u'(x)}{u(x)} = (\ln u(x))'$.
   Conclusion : une primitive sur $\mathbb{R}$ de h est donc la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$H(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x+2\right).$$
2. Une primitive de $x+2$ étant $\dfrac{x^2}{2}+2x$, on en déduit qu'une primitive F de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $F(x) = \dfrac{x^2}{2}+2x-4\ln(\mathrm{e}^x+2)$.
3. Sur l'intervalle $[0~;~2]$, la fonction f est positive : l'aire de la partie du plan est donc égale en unités d'aire à l'intégrale :
   $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^2 = \left[\frac{x^2}{2}+2x-4\ln\left(\mathrm{e}^x+2\right)\right]_0^2 = \frac{2^2}{2}+2\times 2-4\ln\left(\mathrm{e}^2+2\right)-\left[\left(-4\ln\mathrm{e}^0+2\right)\right] =$ $6-4\ln\left(\mathrm{e}^2+2\right)+4\ln 3$ u. a.
   Or une unité d'aire est égale à $2\times 2 = 4$ cm^2.
   Donc l'aire en cm^2 est égale à :
   $$4\left[6-4\ln\left(\mathrm{e}^2+2\right)+4\ln 3\right] \approx 5,75 \text{ cm}^2 \text{ à } 1 \text{ mm}^2 \text{ près.}$$