Corrigé du baccalauréat STL Métropole 21 juin 2011 Physique de laboratoire et de procédés industriels

EXERCICE 1 **6 points**

Première partie

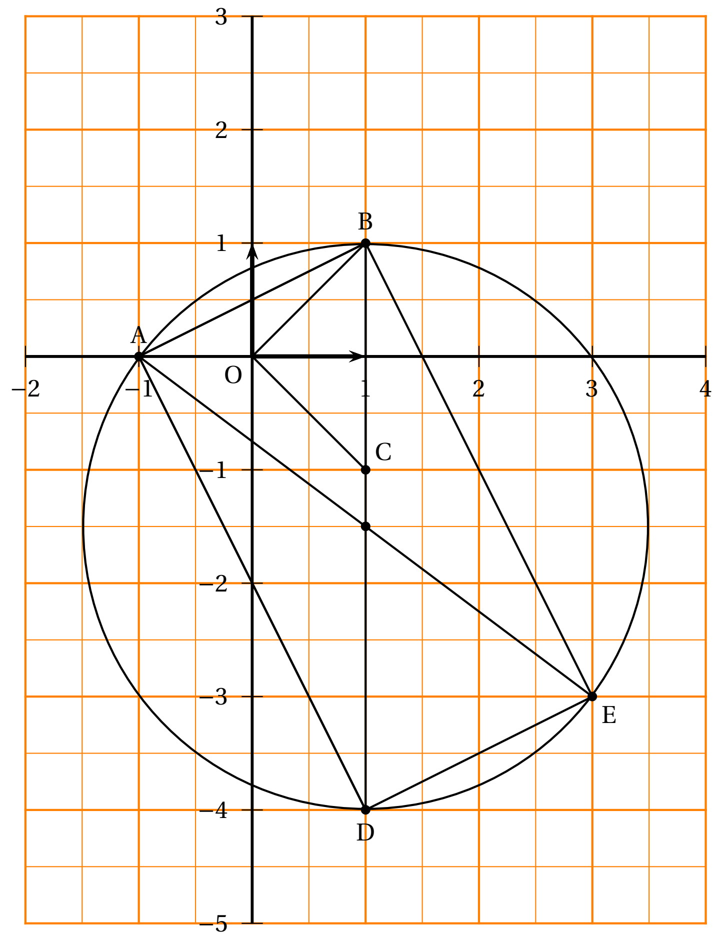
1. $(-1)^3 - 1 + 2 = -2 + 2 = 0 \Rightarrow P(-1) = 0$ qui signifie que -1 est une racine du polynôme P.
2. Développons : $(z+1)\left(az^2 + bz + c\right) = az^3 + bz^2 + cz + az^2 + bz + c =$
$az^3 + (a+b)z^2 + (b+c)z + c$ et en identifiant avec le polynôme $P(z)$:
$\left\{\begin{array}{lcl} a &=& 1\\ a+b &=& -1\\ b+c &=& 0\\ c &=& 2\end{array}\right.$ d'où en « remontant » :
$c = 2,\ b = -2$ et $a = 1$.
Conclusion $P(z) = (z+1)\left(z^2 - 2z + 2\right)$.
3. $P(z) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z+1 &=& 0\\ z^2 - 2z + 2 &=& 0\end{array}\right.$.
La première équation a pour solution -1. Pour l'équation du second degré :
$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times 2 = -4 = (2\text{i})^2 < 0$; l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :
$\dfrac{2 + 2\text{i}}{2} = 1 + \text{i}$ et $1 - \text{i}$. Finalement :

$$S = \{-1 \quad ; \quad 1 + \text{i} \quad ; \quad 1 - \text{i}\}$$

Deuxième partie

1. Voir la figure à la fin.
   a. $|z_B|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow |z_B| = \sqrt{2}$.
   Donc $z_B = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, donc un argument de z_B est $\dfrac{\pi}{4}$.
   Comme $z_C = \overline{z_B}$, le module de z_C est $\sqrt{2}$ et un de ses arguments est $-\dfrac{\pi}{4}$.
   b. La question précédente permet d'écrire $z_B = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_C = \sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$.
   c. On sait déjà que $|z_B| = \text{OB} = |z_C| = \text{OC} = \sqrt{2}$.
   D'autre part la relation de Chasles permet de calculer :
   $\left(\overrightarrow{\text{OC}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
   Conclusion : le point B est l'image du point C dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ (demi-tour).
2. a. On a $\text{BD}^2 = |z_D - z_B|^2 = |-5\text{i}|^2 = 25$;
   $\text{AB}^2 = |z_B - z_A|^2 = |2 + \text{i}|^2 = 4 + 1 = 5$;
   $\text{AD}^2 = |z_D - z_A|^2 = |2 - 4\text{i}|^2 = 4 + 16 = 20$.
   On a donc $5 + 20 = 25 \iff \text{AB}^2 + \text{AD}^2 = \text{BD}^2 \iff$ (ABD) est un triangle rectangle en A.
   b. On sait que le centre du cercle circonscrit au triangle ABD est le milieu de l'hypoténuse [BD] qui a pour affixe $\dfrac{z_B + z_D}{2} = 1 - \dfrac{3}{2}\text{i}$.

c. Si ABED est un rectangle le milieu de [BD] est le milieu de [AE]. D'après la question précédente on a donc :
$1-\dfrac{3}{2}\text{i}=\dfrac{z_\text{A}+z_\text{E}}{2} \iff z_\text{A}+z_\text{E}=2-3\text{i} \iff z_\text{E}=2-3\text{i}-z_\text{A}=2-3\text{i}-(-1)=3-3\text{i}.$



EXERCICE 2 **4 points**

1. On a $C_0 = C_0 - \dfrac{0,2}{100}C_0 = \dfrac{99,8}{100}C_0 = 0,998C_0 = 0,998\times 800 = 798,4 \approx 798$.
De même $C_2 = 0,998C_1 = 0,998\times 798,4 = 796,003 \approx 796$ et $C_3 = 0,998C_2 = 0,998\times 796,003 \approx 795$.
   - **a.** On a $C_{n+1} = C_n - 0,002C_n = (1-0,002)C_n = 0,998C_n$.
   - **b.** La relation précédente montre que la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 800$ et de raison $0,998$.
2. On sait que $C_n = C_0 \times 0,998^n = 800\times 0,998^n$.
3. On a $C_{100} = 800\times 0,998^{100} \approx 655$.
4. Il faut résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation :
$800\times 0,998^n < 10 \iff 0,998^n < \dfrac{1}{80} \iff$ par croissance de la fonction logarithme népérien
$n\ln 0,998 < \ln\frac{1}{80} \iff n\ln 0,998 < -\ln 80 \iff n > -\dfrac{\ln 80}{\ln 0,998}$ (car $\ln 0,998 < 0$).

Or $-\dfrac{\ln 80}{\ln 0,998} \approx 2\,188{,}8 \approx 2\,189$.
La batterie est hors d'usage après 2 189 charges.

PROBLÈME **10 points**

Première partie : résolution d'une équation différentielle

1. On sait que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$ quelconque.
2. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $u'(x) = 2$.
Donc $u'(x) + u(x) = 2 + 2x - \dfrac{7}{2} = 2x - \dfrac{3}{2}$.
$u'(x) + u(x) = 2x - \dfrac{3}{2}$ signifie que la fonction u est une solution de l'équation (E).
3. **a.** h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $h'(x) = -C\mathrm{e}^{-x} + u'(x) = -C\mathrm{e}^{-x} + 2$.
Donc $h'(x) + h(x) = -C\mathrm{e}^{-x} + 2 + C\mathrm{e}^{-x} + u(x) = 2 + u(x) = 2 + 2x - \dfrac{7}{2} = 2x - \dfrac{3}{2}$.
Or $h'(x) + h(x) = 2x - \dfrac{3}{2}$ signifie que la fonction h est une solution de l'équation (E).
b. On a $h(0) = C\mathrm{e}^{-0} + 2 \times 0 - \dfrac{7}{2} = C - \dfrac{7}{2}$, donc $h(0) = -\dfrac{1}{2} \iff C - \dfrac{7}{2} = -\dfrac{1}{2} \iff C = 3$.
La solution particulière h de (E) vérifiant $h(0) = -\dfrac{1}{2}$ est donc définie par :
$x \longmapsto h(x) = 3\mathrm{e}^{-x} + 2x - \dfrac{7}{2}$.

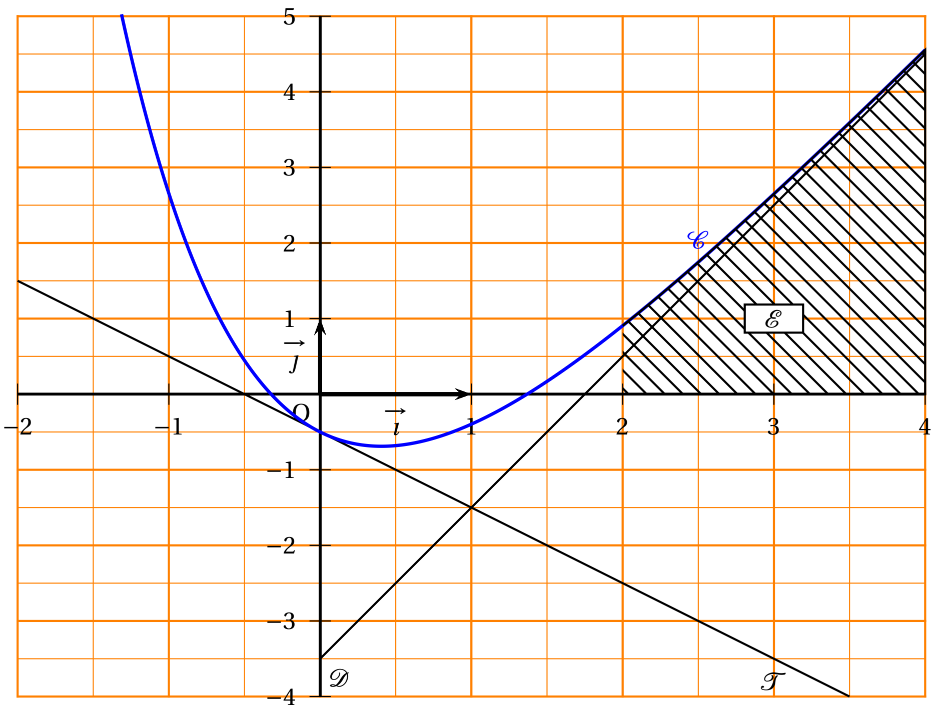
Deuxième partie : étude de la fonction *f*

1. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$, d'où par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
b. On peut écrire $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \times 3 + 2x \times \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{x} - \dfrac{7}{2} \times \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}\left(3 + 2x\mathrm{e}^{x} - \dfrac{7}{2}\mathrm{e}^{x}\right)$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \dfrac{7}{2}\mathrm{e}^{x} = 0$ et enfin $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 3 + 2x\mathrm{e}^{x} - \dfrac{7}{2}\mathrm{e}^{x} = 3$.
D'autre part on sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$.
D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc finalement par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
c. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - 2x - \dfrac{7}{2} = 3\mathrm{e}^{-x}$.
On a vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^{-x} = 0$, on a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} d(x) = 0$ ce qui montre que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - \dfrac{7}{2}$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = -3\mathrm{e}^{-x} + 2$.
Or $f'(x) \geqslant 0 \iff -3\mathrm{e}^{-x} + 2 \geqslant 0 \iff 2 \geqslant 3\mathrm{e}^{-x} \iff \dfrac{2}{3} \geqslant \mathrm{e}^{-x}$ soit par croissance de la fonction logarithme népérien : $\ln\dfrac{2}{3} \geqslant -x \iff x \geqslant -\ln\dfrac{2}{3} \iff x \geqslant \ln\dfrac{3}{2}$.
Conclusion : la fonction f est croissante sur $\left]\ln\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.
Par un raisonnement analogue on montre que f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,\ln\dfrac{3}{2}\right[$.

Il y a donc un minimum $f\left(\ln\dfrac{3}{2}\right) = 3\mathrm{e}^{-\ln\frac{3}{2}} + 2\times\ln\frac{3}{2} - \dfrac{7}{2} = \dfrac{3}{\mathrm{e}^{\ln\frac{3}{2}}} + 2\ln\frac{3}{2} - \dfrac{7}{2} = 2 + 2\ln\frac{3}{2} - \dfrac{7}{2} = 2\ln\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} \approx -0,69$.

3. Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $f'(0) = -3+2 = -1$ et contient le point de coordonnées $\left(0\,;\,-\frac{1}{2}\right)$.
Son équation est donc de la forme $y = -x+b$ et vérifie $-\frac{1}{2} = 0+b \iff b = -\frac{1}{2}$.
L'équation réduite de $\mathcal{T}$ est donc $y = -x - \dfrac{1}{2}$.

4. Tracer les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$, puis la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.



Troisième partie : calcul d'une aire

1. Les sommets du trapèze ont pour coordonnées (2; 0), (4; 0) et approximativement (2; 1) et (4; 4,5). Donc une bonne approximation de l'aire de la partie $\mathcal{E}$ est donnée par l'aire du trapèze de côtés 1 et 4,5 et de hauteur 2, donc d'aire $\dfrac{1+4,5}{2}\times 2 = 5,5$ unités d'aire.
Or une unité d'aire vaut $2\times 1 = 2$ cm^2.
Donc l'aire du trapèze vaut approximativement $2\times 5,5 = 11$ cm^2.

2. La fonction f est positive sur l'intervalle [2; 4], donc l'aire en unités d'aire de la partie hachurée est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \left(3\mathrm{e}^{-x} + 2x - \frac{7}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[-3\mathrm{e}^{-x} + x^2 - \frac{7}{2}x\right]_2^4 =$
$-3\mathrm{e}^{-4} + 4^2 - \dfrac{7}{2}\times 4 - \left(-3\mathrm{e}^{-2} + 2^2 - \dfrac{7}{2}\times 2\right) = 3\mathrm{e}^{-2} - 3\mathrm{e}^{-4} + 12 - 14 + 7 = 5 + 3\mathrm{e}^{-2} - 3\mathrm{e}^{-4}$ unités d'aire
soit $10 + 6\mathrm{e}^{-2} - 6\mathrm{e}^{-4}$ cm^2 soit environ 10,70 cm^2 à 0,01 cm^2 près.