# ∾ Corrigé du baccalauréat STL Métropole 13 septembre 2011 ∾
# Physique de laboratoire et de procédés industriels

**EXERCICE 1** **6 points**

On note i le complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

**1.** Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante : $z^2 - 4z\sqrt{3} + 16 = 0$.
Calculons $\Delta$
$\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 16 = 48 - 64 = -16 = (4\text{i})^2$
$\Delta < 0$  2 racines complexes conjuguées
$z_1 = \dfrac{4\sqrt{3} - \sqrt{(4\text{i})^2}}{2} = 2\sqrt{3} - 2\text{i}$  $z_2 = \dfrac{4\sqrt{3} + \sqrt{(4\text{i})^2}}{2} = 2\sqrt{3} + 2\text{i}$
L'ensemble des solutions de l'équation est : $\left\{2\sqrt{3} - 2\text{i}\ ;\ 2\sqrt{3} + 2\text{i}\right\}$

**2.** On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_\text{A} = 2\sqrt{3} + 2\text{i}$, $z_\text{B} = 2\sqrt{3} - 2\text{i}$, $z_\text{C} = 6\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$

**a.** Déterminons les formes exponentielles des nombres complexes. Pour ce faire, déterminons le module et l'argument de

— $z_\text{A}$

**module :** $|z_\text{A}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$

**argument :** $\theta_1$ est tel que $\cos\theta_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{4}$ et $\sin\theta_1 = \dfrac{2}{4}$ d'où $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$

— $z_\text{B}$

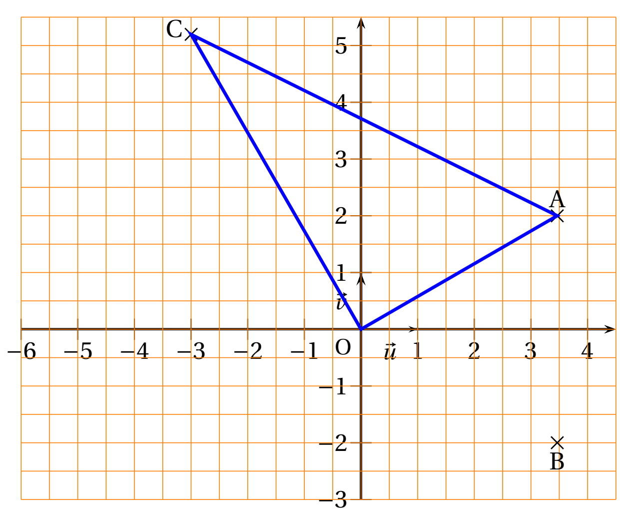
**module :** $|z_\text{B}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$

**argument :** $\theta_2$ est tel que $\cos\theta_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{4}$ et $\sin\theta_2 = \dfrac{-2}{4}$ d'où $\theta_2 = -\frac{\pi}{6}$

Il en résulte $z_\text{A} = 4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z_\text{B} = 4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$

**b.** Déterminons la forme algébrique du nombre complexe $z_\text{C}$.
$z_\text{C} = 6\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}} = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 6\left(-\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3\sqrt{3}\text{i}$

**c.** Construisons les points A, B et C.



**d.** Calculons les longueurs

$OA = |z_A| = 4 \quad OC = |z_C| = 6 \quad AC = |z_C - z_A|$

$$\begin{aligned} AC &= |(-3+3\sqrt{3}\text{i}) - (2\sqrt{3}+2\text{i})| \\ &= |(-3-2\sqrt{3}) + (3\sqrt{3}-2)\text{i}| \\ &= \sqrt{(-3-2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3}-2)^2} \\ &= \sqrt{21+12\sqrt{3}+31-12\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

Le triangle OAC est rectangle en O car $AC^2 = OA^2 + OC^2$
(réciproque de Pythagore $AC^2 = 52$ et $OA^2 + OC^2 = 16 + 36 = 52$).

**3.** On considère la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. On définit le point D comme l'image du point A par cette rotation.

**a.** Déterminons l'affixe de D notée $z_D$. Puisque D est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ nous avons $|z_D| = |z_A|$ par conséquent $\left|\dfrac{z_D}{z_A}\right| = 1$ et $\text{Arg}\left(\dfrac{z_D}{z_A}\right) = \dfrac{\pi}{4}$. Posons $z_D = a + ib$,

$$\frac{z_D}{z_A} = \frac{a+\text{i}b}{2\sqrt{3}+2\text{i}} = \frac{(a+\text{i}b)(2\sqrt{3}-2\text{i})}{2\sqrt{3}+2\text{i})(2\sqrt{3}-2\text{i})} = \frac{(2a\sqrt{3}+2b)+(2b\sqrt{3}-2a)\text{i}}{16}.$$

Nous savons que l'argument d'un nombre complexe Z, $\theta$, est tel que $\cos\theta = \dfrac{\Re(Z)}{|Z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{\Im(Z)}{|Z|}$

Écrivons que l'argument de ce nombre complexe est $\dfrac{\pi}{4}$ et en tenant compte que $\left|\dfrac{z_D}{z_A}\right| = 1$

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{2a\sqrt{3}+2b}{16} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{2b\sqrt{3}-2a}{16} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \dfrac{2a\sqrt{3}+2b}{16} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{2b\sqrt{3}-2a}{16} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} a\sqrt{3}+b = 4\sqrt{2} \\ b\sqrt{3}-a = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Il en résulte $\begin{cases} a = \sqrt{6}-\sqrt{2} \\ b = \sqrt{2}+\sqrt{6} \end{cases}$. Par conséquent $z_D = \sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{6}+\sqrt{2})\text{i}$

**b.** Déterminons la forme exponentielle de $z_D$.

Nous savons que $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OD}) = \dfrac{\pi}{4}$ mais aussi que $\text{Arg}\left(\dfrac{z_D}{z_A}\right) = \text{Arg}(z_D) - \text{Arg}(z_A) = \dfrac{\pi}{4}$

par conséquent $\text{Arg}(z_D) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{12}$. $z_D = 4\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{12}}$

*remarque* Effectuer une rotation de centre O et d'angle $\theta$ revient à multiplier l'affixe de A par $\text{e}^{\text{i}\theta}$

d'où $z_D = 4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} = 4\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{12}}$

**c.** Déterminons les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

$4\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{12}} = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{6}+\sqrt{2})\text{i}$

d'où $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

## EXERCICE 2 — 5 points

On considère l'équation différentielle (E) suivante : $y'' + 4y = 0$, où $y$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $y''$ sa dérivée seconde.

1. Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions de la forme $y(x) = \text{A}\cos(\omega x) + \text{B}\sin(\omega x)$

   ici $\omega = 2$. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $y$ définies par $y(x) = \text{A}\cos(2x) + \text{B}\sin(2x)$

2. Déterminons la solution $f$ de l'équation différentielle précédente qui vérifie les conditions suivantes :

   — $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}$, $\quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{A}\cos\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) + \text{B}\sin\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \text{A}\cos\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + \text{B}\sin\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\text{A}}{2} + \frac{\text{B}\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

   — $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -4$. Dérivons $f$, $\quad f'(x) = \text{A}(-2\sin(2x)) + \text{B}(2\cos(2x)) = -2\text{A}\sin(2x) + 2\text{B}\cos(2x)$

   $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\text{A}\sin\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) + 2\text{B}\cos\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = -2\text{A}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\text{B}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\text{A}\sqrt{3} + \text{B} = -4$

   Résolvons le système ainsi déterminé $\begin{cases} \frac{\text{A}}{2} + \frac{\text{B}\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \\ -\text{A}\sqrt{3} + \text{B} = -4 \end{cases}$

   $\begin{cases} \text{A} + \text{B}\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \\ -\text{A}\sqrt{3} + \text{B} = -4 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \text{A} + \text{B}\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \\ 3\text{A} - \text{B}\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \text{A} = 2\sqrt{3} \\ -\text{A}\sqrt{3} + \text{B} = -4 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \text{A} = 2\sqrt{3} \\ -6 + \text{B} = -4 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \text{A} = 2\sqrt{3} \\ \text{B} = 2 \end{cases}$

   La solution de l'équation différentielle vérifiant les deux conditions est
   $f(x) = 2\sqrt{3}\cos(2x) + 2\sin(2x)$

3. Vérifions que $f$ peut s'écrire sous la forme : $f(t) = 4\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

   Rappel $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

   $$4\cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) = 4\left(\cos(2t)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin(2t)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\cos(2t) \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(2t) \times \left(\frac{1}{2}\right)\right)$$
   $$= 2\sqrt{3}\cos(2t) + 2\sin(2t) = f(t)$$

4. Calculons la valeur moyenne de $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
   Soient $a$, $b$ deux réels tels que $a < b$ et $f$ une fonction dérivable sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

   La valeur moyenne de $f$ sur $[a\,;\,b]$ est le nombre réel $m$ défini par : $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\text{d}x$.

   $f$ est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$

   $m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 4\cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)\text{d}t = \dfrac{1}{\pi}\left[2\sin\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\pi} = \dfrac{2}{\pi}\left[\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] =$
   $\dfrac{2}{\pi}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$

   La valeur moyenne de $f$ sur $[0\,;\,\pi]$ est nulle.

**PROBLÈME** **9 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

**Partie A Étude d'une fonction auxiliaire**

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 1 - 2x - 2\ln x$.

1. Déterminons la fonction $g'$, dérivée de la fonction $g$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   $g'(x) = -2 - 2\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Pour tout $x \in ]0\,;\,+\infty[$, $\quad g' < 0$ comme somme de nombres négatifs.

   Si pour tout $x \in \text{I}$ $f'(x) < 0$ alors la fonction $f$ est strictement décroissante sur I, par conséquent $g$ est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ d'où le tableau de variation de la fonction $g$ sur cet intervalle.

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'$ | ‖ | $-$ | |
| Variations de $g$ | ‖ | ↘ | |

2. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right[$.

   $g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln(2)$ ; $g(1) = -1$.
   $g$ est une fonction strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ a fortiori sur $[\frac{1}{2}\ ;1]$ , $0 \in \left]g(1)\ ;\ g(\frac{1}{2})\right[$
   il existe donc un unique nombre réel appartenant à $\left]\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

   À l'aide de la calculatrice, nous trouvons comme encadrement de α : $0,76 < \alpha < 0,77$.
3. Par conséquent sur $]0\ ;\ \alpha[$, $g > 0$ et sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, $g < 0$.

**Partie B Étude de la fonction *f***

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x + \ln x}{x^2} + 3$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminons la limite de la fonction $f$ en 0.

   $\lim\limits_{x\to 0+} 2x + \ln(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{2x + \ln x}{x^2} = -\infty$. Il s'en suit que $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty$

   **b.** $f(x) = \dfrac{2x + \ln x}{x^2} + 3 = \dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x^2} + 3 = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2} + 3$.

   Nous avons bien pour tout réel $x$ strictement positif, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{2}{x} + 3$.

   Déterminons la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

   $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to +\infty} 3 = 3$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$

   **c.** L'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}$ lorsque $x$ tend vers 0, de même la droite d'équation $y = 3$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$
2. Déterminons la fonction $f'$, dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   $f$ peut s'écrire : $f = h + 3$ donc $f' = h'$, $h = \frac{u}{v}$ où $u(x) = 2x + \ln(x)$ et $v(x) = x^2$. Nous avons donc $u'(x) = 2 + \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$. $h' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

   Il en résulte $f'(x) = \dfrac{(2 + \frac{1}{x})x^2 - 2x(2x + \ln(x))}{x^4} = \dfrac{x(2x + 1 - 4x - 2\ln(x))}{x^4} = \dfrac{1 - 2x - 2\ln(x)}{x^3}$

   Nous venons d'établir que pour tout $x$ strictement positif : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
3. Pour tout $x \in ]0\ ;\ +\infty[$ $x^3 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. $f'(x) > 0$ pour $x \in ]0\ ;\ \alpha[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in ]\alpha\ ;\ +\infty[$.
   Si pour tout $x \in \mathrm{I}$ $f'(x) > 0$ alors la fonction $f$ est strictement croissante sur I, nous en déduisons que $f$ est strictement croissante sur $]0\ ;\ \alpha[$.
   Si pour tout $x \in \mathrm{I}$ $f'(x) < 0$ alors la fonction $f$ est strictement décroissante sur I, nous en déduisons que $f$ est strictement décroissante sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $f$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $\approx 5,157$ | ↘ | $3$ |

**4.** Écrivons une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0$ est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. $f(1) = 5$ et $f'(1) = -1$ d'où $y = -1(x-1) + 5 = -x + 6$. L'équation de $\mathscr{D}$ est $y = -x + 6$

**5.** Traçons la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{D}$ dans le repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Voir dernière page.

**Partie C Calcul d'aire**

**1.** On note $\mathscr{E}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

Voir le domaine hachuré $\mathscr{E}$ sur le graphique.

**2.** Montrons que la fonction H définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $\text{H}(x) = \dfrac{-\ln x - 1}{x}$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. Pour ce faire, montrons que $\text{H}' = f$.

$\text{H} = \dfrac{u}{v}$ où $u(x) = -\ln x - 1$ et $v(x) = x$. Nous avons donc $u'(x) = -\frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$.

$\text{H}' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ donc $\text{H}'(x) = \dfrac{-1 + \ln x + 1}{x^2} = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

**3.** On admet que la fonction $f$ est positive sur l'intervalle $[1~;~\text{e}]$. Calculons l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{E}$ en unités d'aire.

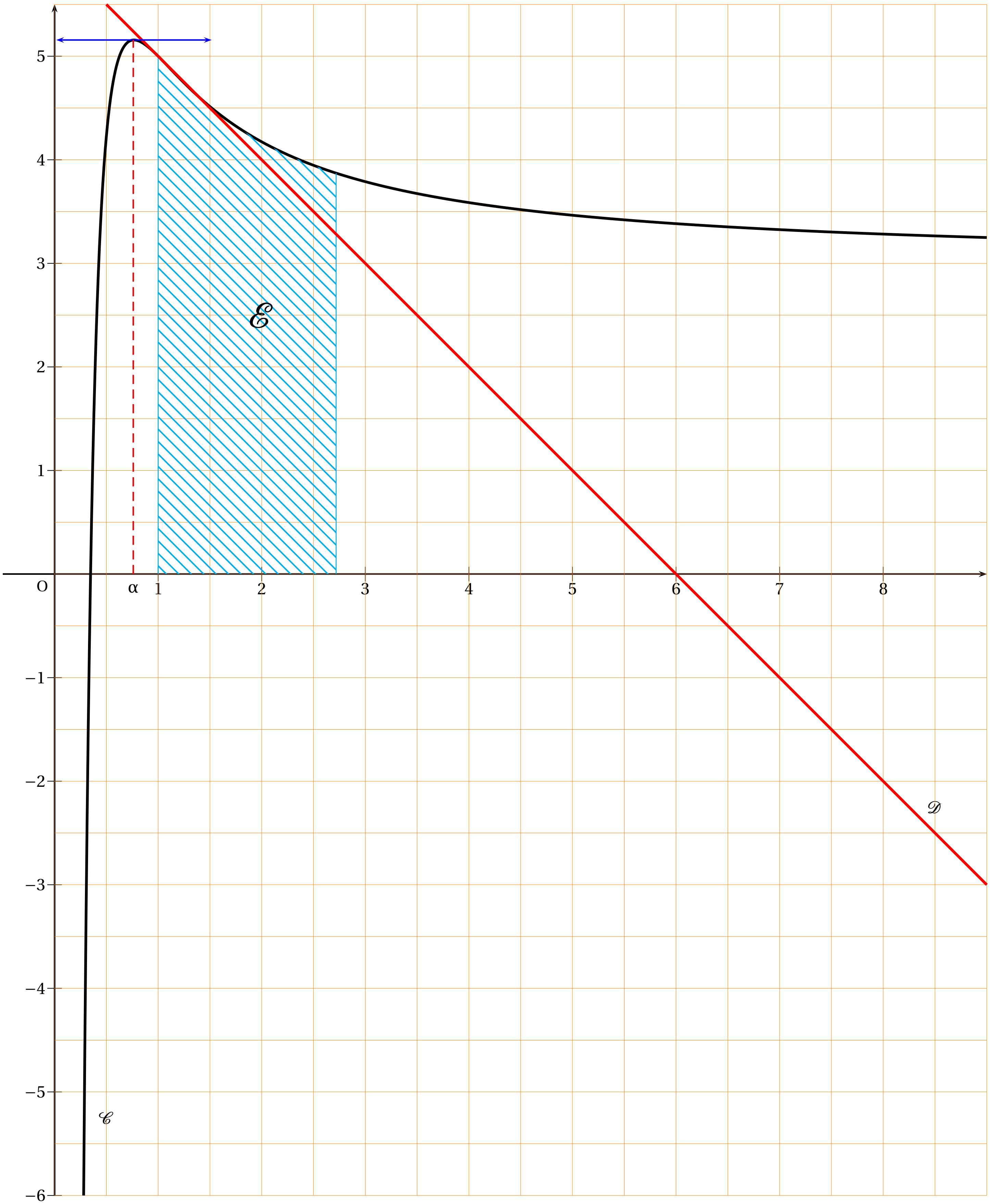
$\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}(x) = \Big[\text{F}(x)\Big]_1^{\text{e}}$ où F est une primitive de $f$.

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{2}{x} + 3$ d'où $\text{F}(x) = \dfrac{-\ln x - 1}{x} + 2\ln(x) + 3x + \text{C}$

$\mathscr{A} = \left[\dfrac{-\ln x - 1}{x} + 2\ln(x) + 3x\right]_1^{\text{e}} = \dfrac{-\ln \text{e} - 1}{\text{e}} + 2\ln(\text{e}) + 3\text{e} - \left(\dfrac{-\ln 1 - 1}{1} + 2\ln(1) + 3\right) = \dfrac{-2}{\text{e}} + 2 + 3\text{e} - (-1 + 0 + 3) = \dfrac{-2}{\text{e}} + 3\text{e}$

L'aire de $\mathscr{E}$ est $3\text{e} - \dfrac{2}{\text{e}}$ unités d'aire.

*Remarque, l'unité d'aire vaut 4 cm$^2$, par conséquent, l'aire de $\mathscr{E}$ est de* $4\left(3e - \dfrac{2}{e}\right)$ *cm$^2$.*


5
4
3
2
1
O
α
1
2
3
4
5
6
7
8
−1
−2
−3
−4
−5
−6
$\mathscr{E}$
$\mathscr{D}$
$\mathscr{C}$