Corrigé du baccalauréat STL Métropole 20 juin 2012
Physique de laboratoire et de procédés industriels

Durée de l'épreuve : 4 heures — Coefficient : 4

Exercice 1 — **5 points**

I. $z^2 - 4\sqrt{2}z + 16 = 0$.

$\Delta = \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 16 = 32 - 64 = -32 = \left(4\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2$. Le discriminant est négatif : il y a donc deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{4\sqrt{2} + 4\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et } z_2 = 2\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

On peut écrire $z_1 = 2\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$ et $z_2 = 2\sqrt{2}(1-\mathrm{i})$.

II.

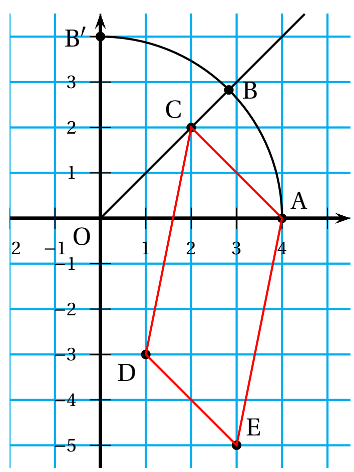
$$z_A = 4, \quad z_B = 2\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2}, \quad z_C = 2 + 2\mathrm{i} \quad \text{et } z_D = 1 - 3\mathrm{i}.$$

1. **a.**
   - z_A a pour module 4 et pour argument 0 ; $z_A = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$
   - z_B : On a $|z_B|^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8 + 8 = 16 = 4^2$, donc $|z_B| = 4$.

   Son argument θ est tel que $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Donc $z_B = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
   - z_C : On a $|z_C|^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$, donc $|z_B| = 2\sqrt{2}$.

   Son argument θ est tel que $\cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Donc $z_C = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

   b.



2. z_B et z_C ont le même argument $\dfrac{\pi}{4}$; B et C sont donc sur la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$: O, B et C sont alignés.
3. On a $\overrightarrow{CA}\,(2\,;-2)$ et $\overrightarrow{AD}\,(-3\,;\,-3)$.
   Donc le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \times (-3) + (-2) \times (-3) = -6 + 6 = 0$; les vecteurs sont orthogonaux, donc (CA) et (AD) sont perpendiculaires en A : le triangle CAD est rectangle en A.

Autre méthode :sur la figure avec les carreaux unités :
$CA^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$; $AD^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$;
$CD^2 = 1^2 + 5^2 = 1 + 25 = 26$.
Comme $8 + 18 = 26$, $CA^2 + AD^2 = CD^2$, ce qui montre par la réciproque du théorème de Pythagore que le triangle CAD est rectangle en A.

4. Le milieu de [AD] est le milieu de [CE] ; les coordonnées $(x\,;y)$ de vérifient donc :
$\left\{\begin{array}{lcl}\frac{1+4}{2} &=& \frac{2+x}{2}\\ \frac{0-3}{2} &=& \frac{2+y}{2}\end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{lcl}5 &=& 2+x\\ -3 &=& 2+y\end{array}\right.$ d'où $x = 3$ et $y = -5$. Donc E$(3\,;\,-5)$.

5. a. A est sur l'axe des abscisses et on a vu qu'un argument de z_A est $\frac{\pi}{4}$. D'autre part z_A et z_B ont le même argument 4 ; doncB est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$

b. On vient de voir que $4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4 \times e^{i\frac{\pi}{4}}$ soit $z_B = z_A \times e^{i\frac{\pi}{4}}$.
On a donc de même :
$z_{B'} = z_B \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 4e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 4i$. Le point B′ est sur l'axe des ordonnées.

EXERCICE 2 — 5 points

1. a. $p_1 = \dfrac{300}{1\,000} = 0,3$.

b. $p_2 = \dfrac{300 + 150}{1\,000} = \dfrac{450}{1\,000} = 0,45$.

2. Soit F la variable aléatoire égale au montant facturé pour un appareil.

a. F peut prendre 120, 135, 145, 155, 165 comme valeurs.

b.

x_i	120	135	145	155	165
$p(F = x_i)$	0,55	0,1	0,05	0,2	0,1

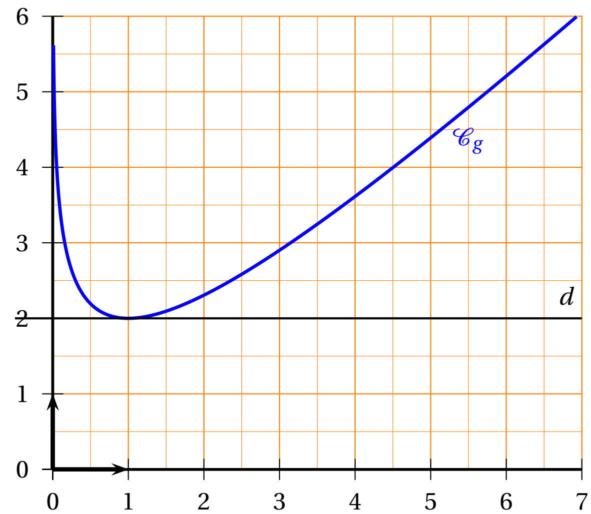
c. On a $E(F) = 120 \times 0,55 + 135 \times 0,1 + 145 \times 0,05 + 155 \times 0,2 + 165 \times 0,1 = 134,25$.

d. On peut estimer la dépense moyenne moyenne pour chacune des personnes interrogées à 134,25 €.

PROBLÈME — 10 points

Partie A : utilisation d'un graphique

Dans le repère orthonormé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_g$ est la représentation graphique d'une fonction g, définie sur $]0\,;\,-\infty[$, que l'on se propose de déterminer. La droite d est tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 et l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_g$.



1. Donner, en utilisant le graphique :

a. Le minimum de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$ semble être 2.

b. La fonction est positive et même $g(x) \geqslant 2$.

c. Il semble que $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

2. Puisque d est tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1, le nombre dérivé en 1 est nul : $f'(1) = 0$.
On a $g(1) = 2$, soit $a + b - \ln 1 = 2$ ou $a + b = 2$;
D'autre part $g'(x) = a - \dfrac{1}{x}$, donc $g'(1) = 0$ s'écrit $a - 1 = 0$, d'où $a = 1$ et d'après la relation $a + b = 2$, $b = 1$.
Conclusion $g(x) = x + 1 - \ln x$.

Partie B : étude de la fonction *f*

$$f(x) = \ln x + \frac{\ln x}{x}.$$

1. a. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\ln x$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, d'où par produit de limites
$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$: l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$

2. a. On a $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{x + 1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. On a vu que sur $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$: la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ de moins l'infini à plus l'infini. De plus $f(1) = 0$.

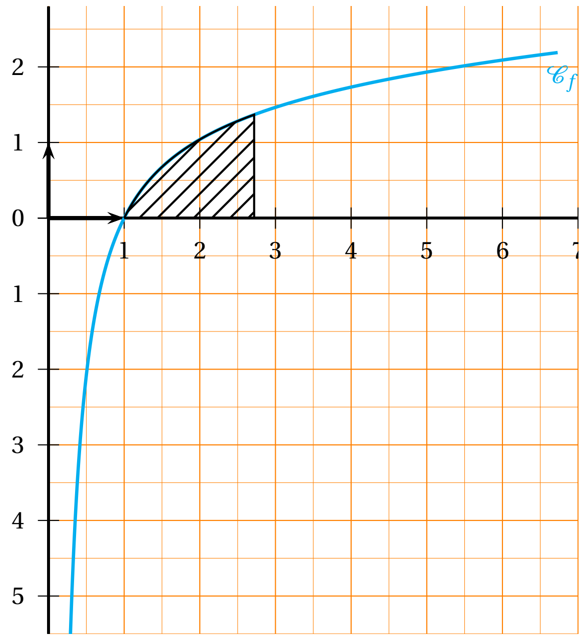
3. a. $f(x) = \ln x + \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{x\ln x}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{x\ln x + \ln x}{x} = \dfrac{(x+1)\ln x}{x}$.

b. D'après l'écriture précédente $f(x) = 0$ si $(x+1)\ln x = 0$ soit si
$x + 1 = 0$ ou $\ln x = 0$, donc si $x = -1$ ou $x = 1$. Seule la seconde solution est possible.
Conclusion : $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au seul point d'abscisse 1.

4. On a $f'(1) = \dfrac{g(1)}{1^2} = g(1) = 2$.

Une équation de T est donc $y = f(1) + (x-1)f'(1)$, soit $y = 0 + 2(x-1)$ et enfin $y = 2x - 2$.

5.



Partie C : détermination d'une aire

1. Voir ci-dessus.

2.

$$F(x) = x\ln x - x + \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

On a $F'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 + \dfrac{1}{2} \times 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = \ln x + 1 - 1 + \dfrac{\ln x}{x} = \ln x + \dfrac{\ln x}{x} = f(x)$, ce qui montre que F est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

3. On a donc $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{\mathrm{e}} = F(\mathrm{e}) - F(1) = \mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \mathrm{e} + \frac{1}{2}(\ln\mathrm{e})^2 - \left[1\ln 1 - 1 + \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right] =$ $\mathrm{e} - \mathrm{e} + \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ unité d'aire.

Comme une unité d'aire est égale à $2 \times 2 = 4$ cm^2, on a :

$$\mathscr{A} = 1{,}5 \times 4 = 6 \text{ cm}^2.$$