Corrigé du baccalauréat STL spécialité biotechnologies
Polynésie – 18 juin 2019

EXERCICE 1 **(4 points)**

Un médecin prescrit une prise de sang à son patient qui se plaint de fatigue récurrente. Cette prise de sang fait apparaître que la concentration en vitamine B12 est anormalement basse.
Le médecin décide de lui prescrire une injection par jour de vitamine B12, ainsi qu'une prise de sang chaque semaine pour en contrôler la concentration. On note $V(t)$ la concentration en picogramme par millilitre ($\text{pg}\cdot\text{mL}^{-1}$) au bout de la semaine t.
On obtient le tableau ci-dessous :

Durée t_i écoulée (en semaine)	0	1	3	5	7	9
Concentration y_i de vitamine B12 (en $\text{pg}\cdot\text{mL}^{-1}$)	100	104	118	128	141	156

On se propose de modéliser la concentration en vitamine B12 en fonction du temps écoulé depuis le début du traitement.
Comme un ajustement affine n'est pas pertinent, on effectue le changement de variable $z_i = \ln(y_i)$.

1. a. On complète le tableau suivant :.

t_i	0	1	3	5	7	9
$z_i = \ln(y_i)$	4,605	4,644	4,771	4,852	4,949	5,050

   b. À l'aide de la calculatrice, on détermine une équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement de z en t par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = at + b$, où les coefficients réels a et seront arrondis au millième : on trouve $z = 0,050t + 4,605$.

Pour la suite, on prend comme modèle d'ajustement, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $z = 0,05t + 4,61$.

2. $z = 0,05t + 4,61 \iff \ln(y) = 0,05t + 4,61 \iff y = \mathrm{e}^{0,05t+4,61} \iff y = \mathrm{e}^{0,05t} \times \mathrm{e}^{4,61}$
   Or $\mathrm{e}^{4,61} \approx 100$ donc on peut dire que $100\,\mathrm{e}^{0,05t}$ représente la concentration en vitamine B12 exprimée en $\text{pg}\cdot\text{mL}^{-1}$, t semaines après le début du traitement.
3. Le patient doit atteindre une concentration de $500\,\text{pg}\cdot\text{mL}^{-1}$ pour que les symptômes de fatigue disparaissent nettement.
   On cherche t pour que $y \geqslant 500$ c'est-à-dire
   $100\,\mathrm{e}^{0,05t} \geqslant 500 \iff \mathrm{e}^{0,05t} \geqslant 5 \iff 0,05t \geqslant \ln(5) \iff t \geqslant \dfrac{\ln(5)}{0,05}$.
   Or $\dfrac{\ln(5)}{0,05} \approx 32,2$ c'est donc au bout de 33 semaines que le patient pourra arrêter son traitement.
4. Cet ajustement ne semble pas adapté à long terme car il nécessite 33 semaines d'injections quotidiennes avant son arrêt..

EXERCICE 2 **5 points**

En France, l'eau du robinet est l'une des substances les plus contrôlées. Elle fait l'objet d'un suivi sanitaire permanent, destiné à en garantir la sécurité. Depuis plusieurs années, la communauté scientifique s'interroge sur la présence dans l'eau, à l'état de traces, de résidus de médicaments de type anxiolytique. Chaque année, les pouvoirs publics en mesurent la concentration. En 2010, on constatait qu'il y avait en moyenne dans l'eau du robinet 2 microgrammes par litre ($\mu\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$) de molécules d'anxiolytique. Depuis 2010, on constate une réduction de 2 % par an de la quantité de molécules d'anxiolytique dans l'eau du robinet. On choisit de modéliser la concentration de molécules d'anxiolytique par une suite. Pour tout entier naturel n, on note C_n la concentration de cette molécule d'anxiolytique dans l'eau l'année (2010+n). Cette concentration est exprimée en $\mu\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$.

1. En 2010, on constatait qu'il y avait en moyenne dans l'eau du robinet 2 microgrammes par litre de molécules d'anxiolytique donc $C_0 = 2$.
   $C_1 = C_0 - C_0 \times \dfrac{2}{100} = 2 \times \left(1 - \dfrac{2}{100}\right) = 2 \times 0,98 = 1,96$.
2. a. Réduire de 2 %, c'est multiplier par 0,98 donc la suite (C_n) est géométrique de raison $q = 0,98$ et de premier terme $C_0 = 2$.

b. On en déduit que, pour tout entier naturel n, $C_n = C_0 \times q^n = 2 \times 0{,}98^n$.

3. La suite (C_n) est géométrique de raison 0,98; or $0 < 0{,}98 < 1$ donc la suite (C_n) a pour limites 0 quand n tend vers l'infini.
Cela signifie que la quantité de molécules d'anxiolytique dans l'eau du robinet tend vers 0 quand les années augmentent.

4. Les pouvoirs publics souhaitent limiter la concentration en molécules d'anxiolytique à $0{,}5\,\mu\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$.
Pour cela, on donne un algorithme.

a. On a complété en bleu les lignes 3 et 5 afin que cet algorithme détermine la durée nécessaire à la réalisation de l'objectif fixé par les pouvoirs publics :

1	$C \longleftarrow 2$
2	$N \longleftarrow 0$
3	Tant que $C > 0{,}5$
4	$\quad N \longleftarrow N + 1$
5	$\quad C \longleftarrow C \times 0{,}98$
6	Fin Tant que

b. Pour déterminer la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de l'algorithme, on résout l'inéquation $C_n \leqslant 0{,}5$:

$$C_n \leqslant 0{,}5 \iff 2 \times 0{,}98^n \leqslant 0{,}5 \iff 0{,}98^n \leqslant 0{,}25 \iff \ln\left(0{,}98^n\right) \leqslant \ln(0{,}25)$$
$$\iff n \ln(0{,}98) \leqslant \ln(0{,}25) \iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}98)}$$

$\dfrac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}98)} \approx 68{,}6$ donc N vaut 69 en fin d'algorithme.

C'est donc en $2010 + 69 = 2079$ que l'objectif sera atteint.

Exercice 3 — 5 points

Dans cet exercice, on s'intéresse à la fabrication de tubes destinés à être utilisés dans un laboratoire pharmaceutique.

Partie A

On note C la variable aléatoire qui à chaque tube fabriqué associe sa capacité en millilitre (mL).
On suppose que C suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart type $\sigma = 2$.

Affirmation 1 : La probabilité que la capacité du tube soit comprise entre 48 mL et 52 mL est environ égale à 0,95.

> $p(48 \leqslant C \leqslant 52) = p(50 - 2 \leqslant C \leqslant 50 + 2) = p(\mu - \sigma \leqslant C \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}68$ d'après le cours.
> **Affirmation 1 fausse**

Affirmation 2 : 30 % des tubes ont une capacité inférieure ou égale à 49 mL, à 1 % près.

> On cherche $p(C \leqslant 49)$; à la calculatrice, on trouve environ 0,309.
> **Affirmation 2 vraie**

On note E l'événement « Le tube présente un défaut de fabrication. ». On suppose que la probabilité de l'événement E est $P(E) = 0{,}03$. On prélève au hasard dans la chaîne de production 200 tubes pour vérification. On suppose que la production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 200 tubes, associe le nombre de tubes ayant un défaut.

Affirmation 3 : X suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}03$.

> On a une répétition avec remise de 200 tirages qui n'ont que 2 issues et dont le succès a pour probabilité 0,03 ; donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}03$.
> **Affirmation 3 vraie**

Affirmation 4 : En moyenne, un lot de 200 tubes contient 5 tubes avec défaut.

> L'espérance mathématique d'une loi binomiale de paramètres n et p est np, ce qui donne ici $200 \times 0{,}03 = 6$. Il y a donc en moyenne 6 tubes défectueux.
> **Affirmation 4 fausse**

Affirmation 5 : La probabilité qu'au moins 5 tubes soient défectueux est 0,719 au millième près.

> On cherche $p(X \geqslant 5)$; à la calculatrice, on trouve environ 0,719.
> **Affirmation 5 vraie**

Partie B

Le fabricant veut améliorer la qualité de fabrication de ses tubes. Pour cela, il en teste 400 et constate que 90 % n'ont pas de défaut. Après des réglages permettant d'améliorer la qualité de fabrication, un nouvel échantillon de 400 tubes est prélevé : 94 % sont sans défaut.

Pour savoir si la différence de pourcentage de tubes sans défaut est significative ou non, on regarde si les deux intervalles de confiance sont disjoints ou non.

- Le premier intervalle de confiance correspondant à un pourcentage de 90 % est
  $I_1 = \left[0{,}9 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}9(1-0{,}9)}{400}}\ ;\ 0{,}9 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}9(1-0{,}9)}{400}}\right] \approx [0{,}8706\ ;\ 0{,}9294]$
- Le second intervalle de confiance correspondant à un pourcentage de 94 % est
  $I_2 = \left[0{,}94 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}94(1-0{,}94)}{400}}\ ;\ 0{,}94 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}94(1-0{,}94)}{400}}\right] \approx [0{,}9167\ ;\ 0{,}9633]$

Les deux intervalles de confiance ne sont pas disjoints, donc la différence entre les taux de 90 % et 94 % n'est pas significative : on ne peut donc pas dire que la qualité de fabrication s'est améliorée.

EXERCICE 4 **6 points**

À un patient souffrant de douleurs intenses, on injecte un antidouleur en perfusion au rythme de 4 milligrammes par heure. On suppose que cet antidouleur n'était pas présent dans le sang avant la perfusion. La quantité d'antidouleur présent à un instant donné est modélisée par une fonction f. Lorsque t représente le temps écoulé, en heure, depuis le début de la perfusion, $f(t)$ représente la quantité, en milligramme, d'antidouleur présent dans le sang.

Partie A

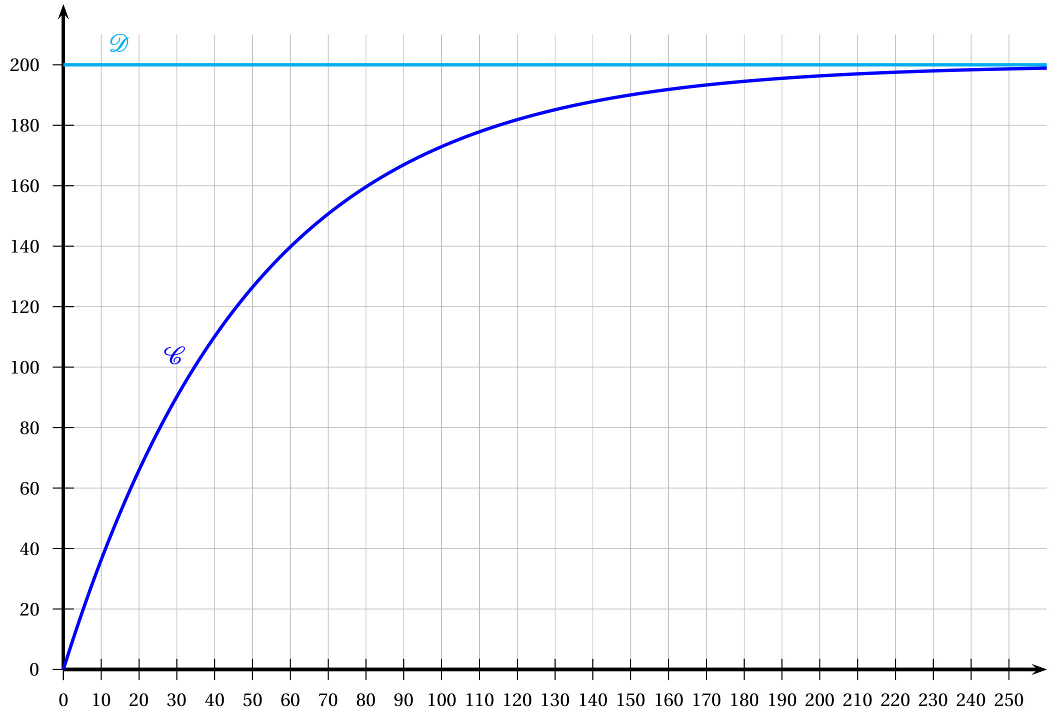
On admet que la fonction f est solution sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $y' + 0{,}02y = 4$.

1. L'équation différentielle $y' + ay = b$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k\mathrm{e}^{-at} + \dfrac{b}{a}$ où k est un réel quelconque, donc l'équation différentielle $y' + 0{,}02y = 4$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}02t} + \dfrac{4}{0{,}02}$, c'est-à-dire $f(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 200$ où k est un réel quelconque.
2. On admet que $f(0) = 0$.
   $f(0) = 0 \iff k\mathrm{e}^0 + 200 = 0 \iff k = -200$; donc la solution cherchée est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = -200\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 200$.

Partie B

1. On admet que $f'(t)$ est donnée sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f'(t) = 4\mathrm{e}^{-0{,}02t}$.
   Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{-0{,}02t} > 0$ donc $f'(t) > 0$; on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On a tracé, ci-dessous, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite $\mathscr{D}$, asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.



2. À l'aide du graphique, on peut dire que la limite de la fonction f en $+\infty$ est 200.

Cette valeur représente la quantité limite de l'antidouleur présent dans le sang.

3. Le débit de perfusion est satisfaisant si au bout de vingt-quatre heures, le sang contient au moins 50 % de la quantité limite de l'antidouleur.
Il faut donc que $f(24) \geqslant 100$.
$f(24) = -200\,\text{e}^{-0,02\times 24} + 200 \approx 76,2 < 100$; donc le débit de perfusion n'est pas satisfaisant.

4. On admet que la quantité moyenne de l'antidouleur présent dans le sang pendant les dix premières heures de perfusion est égale à $\dfrac{1}{10}\displaystyle\int_0^{10} f(t)\,\text{d}t$.

a. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = 10\,000\,\text{e}^{-0,02t} + 200t$.
$F'(t) = 10\,000 \times (-0,02)\,\text{e}^{-0,02t} + 200 = -200\,\text{e}^{-0,02t} + 200 = f(t)$ donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. On pose $I = \displaystyle\int_0^{10} f(t)\,\text{d}t$.
$I = F(10) - F(0) = \left(10\,000\,\text{e}^{-0,02\times 10} + 200 \times 10\right) - \left(10\,000\,\text{e}^{-0,02\times 0} + 200 \times 0\right) = 10\,000\,\text{e}^{-0,2} - 8\,000$
$\approx 187,31$

c. $\dfrac{187,31}{10} = 18,731$ donc une valeur approchée, au dixième de milligramme près, de la quantité moyenne de l'antidouleur présent dans le sang pendant les dix premières heures de perfusion est 18,7.