∽ Baccalauréat STL Métropole 28 mars 2023 ∾

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Correction

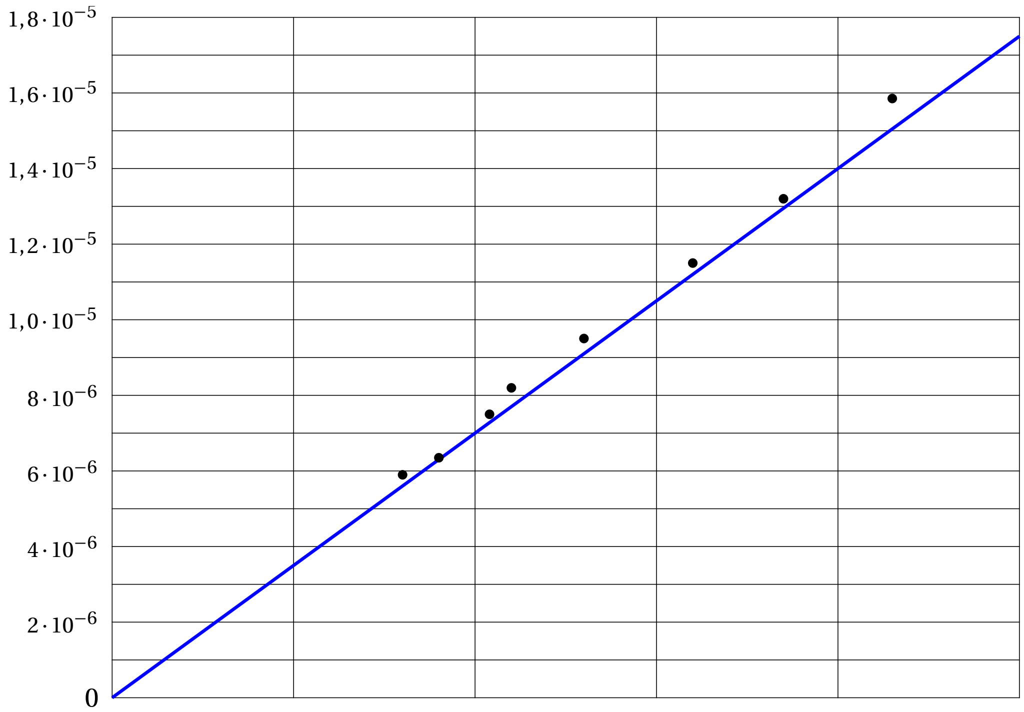
Physique-Chimie et Mathématiques

EXERCICE 1 4 points

La production de sucre inverti est réalisée en laboratoire lors de la transformation chimique du saccharose en milieu acide, en chauffant.
On définit la vitesse v de disparition du saccharose de concentration c en quantité de matière par :

$$v = -\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}.$$

Expérimentalement, nous réalisons un suivi cinétique de cette transformation qui permet d'obtenir le graphe ci-après représentant l'évolution de la vitesse v de disparition du saccharose en fonction de sa concentration c en quantité de matière dans le mélange.
On peut modéliser cette situation par une fonction linéaire.



1. À partir du graphique précédent, choisir, en justifiant la réponse, le modèle adapté à la cinétique chimique de cette réaction parmi les propositions suivantes :

   ~~modèle 1 : $v = k$~~ , modèle 2 : $v = k.c$, ~~modèle 3 : $v = k.c^2$~~

   où k est la constante de vitesse.

   Le modèle adapté est le modèle 2, car les points sont presque alignés.

2. Déterminer une valeur approchée de la constante de vitesse k en précisant son unité. En lisant les coordonnées du point extrême de la droite d'ajustement $(0,0241\ ;\ 1,8 \times 10^{-5})$, nous obtenons

$$k = \frac{1,8 \times 10^{-5}}{0,0241} \approx 7,47 \times 10^{-4}.$$

Dans la suite de cet exercice, on prendra $k = 7 \times 10^{-4}$.

3. Déterminons le temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}}$: $t_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln(2)}{7 \times 10^{-4}} \approx 990{,}21$.

4. Le résultat précédent, temps de demi-réaction plutôt élevée, montre que la transformation chimique réalisée au laboratoire est lente.

À partir du modèle identifié à la question 1, on montre que la cinétique de l'hydrolyse du saccharose peut être modélisée par l'équation différentielle

$$(E) : \quad \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -k \times c \text{ (soit en mathématiques } y' = -k \times y)$$

où $k = 7 \times 10^{-4}$.

5. Résolvons sur $[0\,;\,+\infty[$ cette équation différentielle.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par
$y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.
$a = -7 \times 10^{-4}$, $\quad b = 0$ par conséquent sur $[0\,;\,+\infty[$ $y(t) = C\mathrm{e}^{-7\times10^{-4}t}$ où C est une constante quelconque.
Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f définies par $f(t) = C\,\mathrm{e}^{-7\times10^{-4}t}$.

6. Sachant que pour $t = 0$, la concentration initiale du saccharose vaut 0,4 mol·L^{-1}, déterminons la constante C. $f(0) = C \times \mathrm{e}^0$ d'où $C = 0{,}4$. Par conséquent, l'unique solution de l'équation (E) est la fonction c définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$c(t) = 0{,}4 \times \mathrm{e}^{-7\times10^{-4}\times t}.$$

7. Déterminons la limite de $c(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-7\times10^{-4}\times t} = 0 \qquad \text{il en résulte que } \lim_{t\to+\infty} c(t) = 0$$

8. Ce résultat dans le contexte de la production réalisée en laboratoire montre qu'à très long terme le saccharose aura disparu.

EXERCICE 3 4 points

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\mathrm{e}^{2t} > 0{,}12.$$

Appliquons aux deux membres de l'inégalité la fonction ln. Étant une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ elle conserve l'ordre.
nous obtenons $\ln(\mathrm{e}^{2t}) > \ln(0{,}12)$ d'où $2t > \ln(0{,}12)$ et $t > \dfrac{\ln(0{,}12)}{2}$ $\left(\dfrac{\ln(0{,}12)}{2} \approx -1{,}06\right)$.

Question 2

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(t) = a\mathrm{e}^{2t+6}.$$

1. F est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 6\text{e}^{2t+6}$.
   Déterminons la valeur de a.
   La dérivée de la fonction F est : $F'(t) = a \times 2\text{e}^{2t+6} = f(t) = 6\text{e}^{2t+6}$
   Par conséquent $2a = 6$ d'où $a = 3$.
2. Une autre primitive de la fonction f, est la fonction G définie par $G(t) = 3\text{e}^{-2t+6} + \lambda$ où λ est un nombre réel quelconque.

Question 3

On s'intéresse à l'équipement des habitants d'une grande ville en ordinateurs depuis 2000.
La part (exprimée en %) des habitants de cette ville ayant au moins un ordinateur est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty]$ par :

$$f(t) = \frac{94,6}{1+\text{e}^{0,6-0,2t}}$$

où t est la durée écoulée (en année) depuis l'année 2000.
Montrons que le taux d'équipement ne peut jamais être supérieur à 94,6 %.
On sait que quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $\text{e}^{0,6-0,2t} > 0$, donc $1+\text{e}^{0,6-0,2t} > 1+0$ soit $1+\text{e}^{0,6-0,2t} > 1$ et en prenant l'inverse $\dfrac{1}{1+\text{e}^{0,6-0,2t}} < 1$ et finalement en multipliant chaque membre par 94,6 : $\dfrac{94,6}{1+\text{e}^{0,6-0,2t}} < 94,6$, soit $f(t) < 94,6$.

Question 4

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty]$ par :

$$f(x) = \frac{\text{e}^x}{x^2+26x}.$$

Déterminons la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.
$f(x) = \dfrac{\text{e}^x}{x^2\left(1+\frac{26}{x}\right)} = \dfrac{\text{e}^x}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{26}{x}}$.
On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{26}{x}$: 0, d'où par some de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{26}{x}$: 0 et par quotient de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{26}{x}\frac{1}{1+\frac{26}{x}} = 1$.
On sait (croissances comparées) que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{e}^x}{x^2} = +\infty$, donc finalement par produit de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{e}^x}{x^2\left(1+\frac{26}{x}\right)} = +\infty.$$