# Corrigé du baccalauréat STL spécialité biotechnologies Antilles-Guyane 20 juin 2018

**EXERCICE 1** **5 points**

L'utilisation d'un antiseptique permet de diminuer la population de bactéries.
Le tableau ci-dessous donne le nombre de bactéries en fonction du temps en minutes.

| Temps en minutes : $t_i$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de bactéries : $n_i$ | 15 000 | 11 000 | 8 400 | 6 600 | 5 500 | 4 600 |

1. Le nuage de points de coordonnées $(t_i\ ;\ n_i)$ est représenté sur une feuille de papier millimétré.
2. On estime qu'un ajustement affine n'est pas pertinent. On choisit d'effectuer un changement de variable en posant : $y_i = \ln(n_i)$

   **a.** Le tableau suivant, est complété dans l'**annexe à rendre avec la copie, page 5** en donnant des valeurs approchées arrondies à 0,001 près des résultats.

| Temps en minutes : $t_i$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i = \ln(n_i)$ | 9,616 | | | | | |

   **b.** À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés de $y$ en $t$ est $y = -0{,}118t + 9{,}555$. Les coefficients sont arrondis à 0,001.

3. Dans la suite, on suppose que la droite d'ajustement affine de $y$ en $t$ obtenue par la méthode des moindres carrés a pour équation $y = -0,12t + 9,55$.
   On admet que le modèle reste valable au-delà de 10 minutes.

   **a.** Donnons une estimation du nombre de bactéries au bout de 15 minutes. Remplaçons $t$ par sa valeur dans l'équation de la droite.
   $y = -0{,}12 \times 15 + 9{,}55 = 7{,}75$.
   $y = \ln n \iff n = \mathrm{e}^y$. Il en résulte $n = \mathrm{e}^{7{,}75} \approx 2\,321{,}57$.
   Une estimation du nombre de bactéries au bout de quinze minutes est, à la centaine près, de 2 400.

   **b.** Déterminons au bout de combien de temps nous pouvons estimer que le nombre de bactéries est inférieur à 100.
   Déterminons d'abord l'ordonnée du point de la droite correspondant à un effectif de 100. $y = \ln 100 \approx 4{,}605$.
   Déterminons maintenant l'abscisse du point correspondant à cette ordonnée. Résolvons $-0{,}12t + 9{,}55 = 4{,}605$.
   $0{,}12t = 9{,}55 - 4{,}605$ d'où $t = \dfrac{9{,}55 - 4{,}605}{0{,}12} \approx 41{,}208$.
   Nous pouvons estimer, à la minute près, que le nombre de bactéries sera inférieur à cent au bout de quarante-deux minutes.

**EXERCICE 2** **5 points**

En décembre 2017, Vincent emprunte 5 000 € à ses parents pour acheter une voiture.
Il décide de les rembourser le premier jour de chaque mois. Le 1er janvier 2018, il effectue un premier versement de 100 €.
Pour limiter la durée du prêt, il décide ensuite d'augmenter les versements de 2 % chaque mois.

1. À une augmentation de 2 % correspond un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{2}{100}$ soit 1,02.
   Le montant versé le 1er février 2018 sera de $100 \times 1{,}02$ soit 102 €.

**2.** On modélise la situation par une suite $u$. On note $u_n$ le montant versé le n-ième mois. On a donc $u_1 = 100$.

**a.** La suite $u$ est géométrique de raison 1,02 puisque le remboursement d'un mois $n$ à l'autre $n+1$ est multiplié par 1,02.

**b.** Le terme général d'une suite géométrique de premier terme $u_1$ et de raison $q$ est :
$u_n = u_1 \times (q)^{n-1}$. $u_n = 100 \times (1{,}02)^{n-1}$.

**c.** Le montant que Vincent versera le 1er décembre 2018 est $u_{12}$.
$u_{12} = 100 \times (1{,}02)^{11} \approx 124{,}34$. Vincent remboursera, à 0,01 près, 124,34€.

**d.** Pour savoir si Vincent aura remboursé un quart de ce qu'il doit à ses parents le 30 décembre 2018, calculons la somme $S$ des versements effectués.
$S = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=12} u_i = u_1 \times \frac{q^{12}-1}{q-1}$. $S = 100 \times \dfrac{1{,}02^{12}-1}{0{,}02} \approx 1\,341{,}21$.
Au 30 décembre 2018, Vincent aura remboursé un peu plus du quart de la somme due ($1\,341{,}21 > 1\,250$).

**3.** On considère l'algorithme suivant :

```
n ⟵ 1
u ⟵ 100
S ⟵ 100
Tant que S < 5000
    n ⟵ n + 1
    u ⟵ 1,02 × u
    S ⟵ S + u
Fin Tant que
```

**a.** Nous avons exécuté pas à pas cet algorithme en remplissant le tableau en **annexe à rendre avec la copie, page 5**, avec les premières valeurs successives prises par les variables $u$ et $S$ arrondies au centime.

| Valeurs de $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Valeurs de $u$ | 100 | | | |
| Valeurs de $S$ | 100 | | | |

**b.** Le nombre inscrit dans la cellule grisée représente le total de ses remboursements au 30 avril 2018.

**c.** La valeur de la variable $n$ représente, après l'exécution complète de l'algorithme, le nombre de remboursements effectués ou la durée du remboursement.
*Il n'est pas attendu de la calculer. À titre informatif, il faut compter trois ans.*

## EXERCICE 3 — 5 points

Une catastrophe a rendu impropre à la consommation l'eau potable d'une commune. L'eau du réseau contient une substance chimique dont l'évolution de la concentration en fonction du temps $t$ écoulé depuis le début de la pollution est modélisée par la fonction $f$ telle que :

$$f(t) = 30\mathrm{e}^{-0{,}06t}$$

La fonction $f$ est définie sur $[0 ; +\infty[$.
$f(t)$ est en $\mathrm{mg \cdot L^{-1}}$ et $t$ en heures.

**1.** Résolvons l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}06y = 0$
Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y$ définies par $y(x) = C\mathrm{e}^{-ax}$ où $C$ est une constante quelconque.
$a = -0{,}06$ par conséquent sur $[0 ; +\infty[$, $f(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}06t}$ où $C$ est une constante quelconque.

**2.** La fonction $f$ est une solution de l'équation différentielle (E) où $C = 30$.

**3.** $f(0) = 30$. Ce résultat est la concentration en $\mathrm{mg \cdot L^{-1}}$de la substance chimique dans l'eau potable au début de la pollution.

**4.** La concentration, à $10^{-2}$ près, de la substance chimique dans l'eau au bout d'une journée est $f(24)$. $f(24) = 30\mathrm{e}^{-0,06\times 24} \approx 7,11$.

**5.** L'eau sera à nouveau consommable si la concentration de la substance chimique dans l'eau est inférieure à 0,05 mg·L$^{-1}$. Pour connaître au bout de combien de temps nous pourrons de nouveau consommer l'eau du robinet, résolvons $f(t) \leqslant 0,05$.

$$\begin{aligned} 30\mathrm{e}^{-0,06t} &\leqslant 0,05 \\ \mathrm{e}^{-0,06t} &\leqslant \frac{0,05}{30} \\ \mathrm{e}^{-0,06t} &\leqslant \frac{1}{600} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ln\left(\mathrm{e}^{-0,06t}\right) &\leqslant \ln\frac{1}{600} \\ -0,06t &\leqslant -\ln 600 \\ t &\geqslant \frac{\ln 600}{0,06} \end{aligned}$$

$\dfrac{\ln 600}{0,06} \approx 106,615$

Nous pouvons estimer que l'eau sera de nouveau potable au bout de quatre jours dix heures trente-sept minutes.

*Remarque* si la réponse est à une heure près, la réponse est 107 h.

**6.** On admet que la concentration moyenne de la substance chimique dans l'eau, lors des douze premières heures, est donnée par la formule :

$$C = \frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t$$

**a.** Vérifions que la fonction $F$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = -500\mathrm{e}^{-0,06t}$ est une primitive de $f$. Pour ce faire, dérivons $F$.
$F'(t) = -500 \times (-0,06)\mathrm{e}^{-0,06t} = 30\mathrm{e}^{-0,06t} = f(t)$.
$F$ est une primitive de $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

**b.** Calculons la valeur exacte de $C$.
$C = \dfrac{1}{12}\displaystyle\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{12}\left[-500\mathrm{e}^{-0,06t}\right]_0^{12} = \dfrac{1}{12}\left(-500\mathrm{e}^{-0,06\times 12} + 500\right)$.
$C = \dfrac{1}{12}\left(500 - 500\mathrm{e}^{-0,72}\right) = \dfrac{125}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,72}\right)$.

**c.** Une valeur approchée à $10^{-2}$ près de la concentration moyenne de la substance chimique dans l'eau, lors des douze premières heures est de 21,39 mg·L$^{-1}$.

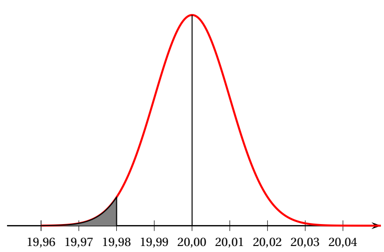
## EXERCICE 4 — 5 points

Une entreprise fabrique en grande série des éprouvettes de volume théorique 20 mL, destinées à être utilisées en laboratoire.

*Les résultats seront donnés par des valeurs approchées, arrondies à 0,001.*

### PARTIE A :

On appelle $X$ la variable aléatoire qui, à chaque éprouvette, associe son volume en mL.
$X$ suit une loi normale dont la densité est représentée ci-dessous.
On admet que l'écart-type de $X$ est $\sigma = 0,01$.



1. En utilisant le graphique, l'espérance de $X$ est µ soit 20.
2. L'aire de la partie grisée sur le graphique représente la probabilité que $X$ soit inférieure à 19,98, autrement dit $P(X \leqslant 19{,}98)$.
3. Calculons la probabilité que le volume de l'éprouvette soit compris entre 19,975 mL et 20,025 mL.

   À l'aide de la calculatrice , arrondie à $10^{-3}$, $P(19{,}975 \leqslant X \leqslant 20{,}025) \approx 0{,}988$.

**PARTIE B :**

Une éprouvette est dite conforme si son volume est compris entre 19,975 mL et 20,025 mL.
Un laboratoire commande un lot de 1 000 éprouvettes. Ces éprouvettes sont prélevées dans le stock de manière aléatoire. On considère le stock suffisamment grand pour que le prélèvement soit assimilé à un tirage aléatoire avec remise.
L'entreprise assure que la probabilité qu'une éprouvette ne soit pas conforme, dans un tel stock, est de 0,012.

1. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion observée est :

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ,\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

   $n > 30$, $np = 20 > 5$, $np(1-9) = 19{,}6 > 5$.

$$\left[0{,}012 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}012(1-0{,}012)}{1\,000}}\ ;\ 0{,}012 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}012(1-0{,}012)}{1\,000}}\right] \approx [0{,}006\ ;\ 0{,}018]$$

   Les bornes de l'intervalle sont arrondies à $10^{-3}$

2. Dans ce lot de 1 000 éprouvettes, le laboratoire a trouvé 9 éprouvettes non conformes.

   La fréquence d'éprouvettes qui ne sont pas conformes est $\dfrac{9}{1\,000} = 0{,}009$.

   En utilisant l'intervalle de fluctuation précédent, nous pouvons dire, que la proportion d'éprouvettes non conformes appartient à l'intervalle de fluctuation. Au risque de 5 % l'annonce faite par l'entreprise est acceptable.

**Annexe à numéroter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve même non complétée**

**EXERCICE 1 Question 2. a.**

| Temps en minutes : $t_i$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i = \ln(n_i)$ | 9,616 | 9,306 | 9,036 | 8,795 | 8,613 | 8,434 |

**EXERCICE 2 Question 3. a.**

| Valeurs de $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Valeurs de $u$ | 100 | 102 | 104,04 | 106,12 |
| Valeurs de $S$ | 100 | 202 | 306,04 | 412,16 |