# Baccalauréat STL biotechnologies Nouvelle Calédonie
# 27 novembre 2018

**EXERCICE 1** **6 points**

*La partie A est indépendante des parties B et C.*

Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

**Partie A : Questionnaire à choix multiples**

*Pour chaque question, **une seule** des réponses proposées est exacte. Chaque bonne réponse rapporte un point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'enlève pas de point. Reporter, sur la copie, le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

1. Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(3x^2+4\right)\mathrm{e}^{2x-1}$.

   La fonction $f'$ dérivée de $f$ est donnée par :

   **a.** $\cancel{f'(x) = 6x\mathrm{e}^{2x-1}}$

   **b.** $\cancel{f'(x) = 6x \times \ln(2x-1)}$

   **c.** $\boxed{f'(x) = \left(6x^2+6x+8\right)\mathrm{e}^{2x-1}}$ $f'(x) = (3(2x))\mathrm{e}^{2x-1} + (3x^2+4)(2\mathrm{e}^{2x-1})$

   **d.** $\cancel{f'(x) = 12x\mathrm{e}^{2x-1}}$

2. On considère l'équation différentielle suivante $(E)$ : $\quad 2y' - 3y = 1$. Nous avons donc

   $y' - \dfrac{3}{2}y = \dfrac{1}{2}$

   Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y$ définies par

   $y(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où $C$ est une constante quelconque.

   $a = -\frac{3}{2}$ $b = \frac{1}{2}$ par conséquent sur $\mathbb{R}$ $f(x) = C\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} + \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}$

   c'est-à-dire $f(x) = C\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} - \dfrac{1}{3}$ où $C$ est une constante quelconque.

   Une solution $f$ de $(E)$ est donnée par :

   **a.** $\boxed{f(x) = 2018\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} - \dfrac{1}{3}.}$

   **b.** $\cancel{f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} - \dfrac{1}{3}}$

   **c.** $\cancel{f(x) = 2018\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{1}{3}}$

   **d.** $\cancel{f(x) = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} + \dfrac{1}{3}}$ .

**PARTIE B**

Sur l'annexe 1, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

1. Graphiquement une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = -x+2$.

2. **a.** Graphiquement l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\{-1 ; 1 ; 2\}$.

   **b.** Dressons le tableau de signes de la fonction $f$ sur $[-1 ; 2,5]$.

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $2,5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f(x)$ | 0 | + | 0 | $-$ | 0 | + | |

3. L'aire, en unité d'aire, du domaine hachuré sur l'annexe 1 à l'aide d'une intégrale est $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

**PARTIE C**

On admettra, dans la suite, que la fonction étudiée dans la partie B est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3-2x^2-x+2$.

1. Déterminons, par le calcul, les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

   $f(0) = 2 \quad f'(x) = 3x^2-2(2x)-1 = 6x^2-4x-1$ d'où $f'(0) = -1$

   Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)x + f(0)$. Il en résulte $y = -x+2$.

2. **a.** Déterminons, en détaillant les calculs, la valeur exacte de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   $$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-2\right) = -\frac{4}{3}+4 = \frac{8}{3}.$$

   **b.** Ce résultat dans le contexte de l'exercice correspond à l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de $f$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

**EXERCICE 2** **5 points**

Le métabolisme de base d'un organisme correspond aux besoins énergétiques incompressibles de l'organisme, c'est-à-dire l'énergie minimale quotidienne permettant à l'organisme de survivre. Il dépend essentiellement de la taille, du poids, de l'âge, du sexe.

Le tableau ci-dessous donne, en fonction de l'âge, le métabolisme de base en kcal (kilocalorie) d'une femme mesurant 1,60 m et pesant 55 kg :

| Âge $t_i$ (en année) | 23 | 27 | 34 | 40 | 48 | 62 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Métabolisme de base $m_i$ (en kcal) | 1 325 | 1 297 | 1 259 | 1 233 | 1 204 | 1 165 |

1. On effectue les changements de variable : $x_i = \ln(t_i)$ et $y_i = \ln(m_i)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

   **a.** Le tableau est complété sur l'annexe 2 (à rendre avec la copie).

   **b.** Le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ est représenté dans le repère de l'annexe 2.

   Un ajustement affine est envisageable parce que les points semblent quasi alignés.

   **c.** À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite $\mathcal{D}$ d'ajustement de $y$ en $x$ obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = -0,13x+7,595$ (*a est arrondi à* $10^{-2}$ *près et b à* $10^{-3}$ *près*).

   **d.** Cette droite $\mathcal{D}$ est représentée dans le repère de l'annexe 2.

**2.** **a.** Déterminons, à partir de l'équation obtenue à la question **l. c.**, que $m \approx 1990 \times t^{-0,13}$.
Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\ln m &= -0,13\ln t + 7,595\\
\ln m &= -0,13\ln t + \ln \mathrm{e}^{7,595}\\
\ln m &= -0,13\ln t + \ln 1\,988,23\\
\ln m &= \ln t^{-0,13} + \ln 1\,988,23\\
\ln m &= \ln 1\,988,23 t^{-0,13}\\
m &= 1\,988,23 t^{-0,13}
\end{aligned}$$

Aux défauts d'arrondis, nous pouvons considérer que $m \approx 1\,990 \times t^{-0,13}$.

**b.** Donnons une estimation, arrondie à 1 kcal , du métabolisme de base de cette femme à 70 ans. En utilisant la relation précédente pour $t = 70$, nous obtenons $m \approx 1\,990 \times 70^{-0,13} \approx 1\,146$.

**c.** Déterminons à quel âge, arrondi à 1 an, son métabolisme de base était de 1 180 kcal. Pour ce faire, résolvons $1\,180 = 1\,990 \times t^{-0,13}$
$t^{-0,13} = \dfrac{118}{199}$ ; $-0,13\ln t = \ln 0,593$ ; $\ln t = -\dfrac{\ln 0,593}{0,13} \approx 4,02$ ; $t = \mathrm{e}^{4,02}$ ; $t \approx 55,7$

Son métabolisme de base était de 1 180 kcal vers 56 ans.

*Remarque : autre procédé* Sachant que $\ln 1180 \approx 7,073$ , nous résolvons $7,073 = -0,13x + 7,595$ d'où $x \approx 4,02$ et $t \approx 56$

**3. La formule de Black et al. et les besoins caloriques quotidiens**

**a.** De nos jours, la formule de Black et al. (1996) est la formule de référence pour une estimation de la valeur du métabolisme de base exprimée en kcal. Pour une femme, la formule est :

$$m = 230 \times p^{0,48} \times h^{0,5} \times t^{-0,13}$$

où $m$ est le métabolisme de base en kcal, $p$ est la masse en kg, $h$ est la taille en m et $t$ est l'âge en année.

La formule établie en **2. a.** donnant le métabolisme de base d'une femme mesurant 1,60 m et pesant 55 kg est à peu près cohérente avec la formule de Black et al, puisque $230 \times 55^{0,48} \times 1,6^{0,5} \approx 1\,991,42$.

Nous aurions alors une augmentation du métabolisme de base.

**b.** Les besoins caloriques quotidiens moyens dépendent du métabolisme de base et de l'activité ; aussi pour les calculer, on multiplie le métabolisme de base par 1,37 pour des femmes sédentaires, par 1,55 pour des femmes actives et par 1,80 pour des femmes sportives.

Calculons les besoins caloriques quotidiens $B$, arrondis à 1 kcal, d'une lycéenne sportive âgée de 17 ans mesurant 1,72 m et pesant 60 kg.

$B = m \times 1,8 = 230 \times 60^{0,48} \times 1,72^{0,5} \times 17^{-0,13} \times 1,8 \approx 2\,681$.

Les besoins caloriques quotidiens arrondis à 1 kcal, de cette lycéenne sportive est d'environ 2 681 kcal.

**EXERCICE 3** **5 points**

*Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.*
**Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à $10^{-3}$ près.**

La dureté d'une eau est liée à la présence de calcaire dans le sous-sol. Plus une eau est calcaire, plus elle est riche en calcium. Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille dépasse 60 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est moyennement dure ou calcaire.

**Partie A : Loi binomiale**

Dans un stock important de bouteilles, 7 % des bouteilles contiennent de l'eau calcaire. On prélève au hasard 75 bouteilles dans le stock pour vérifier la concentration en calcium. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 75 bouteilles.
On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de bouteilles d'eau calcaire de ce prélèvement.

1. Justifions que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale, de paramètres $n = 75$ et $p = 0,07$. $X$ est distribuée selon la loi binomiale de paramètres $n = 75$ et $p = 0{,}07$ puisque il y a répétition de 75 tirages indépendants et identiques caractérisés par deux issues soit la bouteille contient de l'eau calcaire avec une probabilité $p = 0,07$ soit la bouteille ne contient pas d'eau calcaire avec une probabilité $q = 1 - p = 0,01$.

   Par conséquent, $p(X = k) = \binom{75}{k}(0{,}07)^k(0{,}93)^{75-k}$.

2. Déterminons $p(X = 5)$ arrondie à $10^{-3}$ près

   $p(X = 5) = \binom{75}{5}(0{,}07)^5(0{,}93)^{75-5} \approx 0{,}180$

   La probabilité que, lors d'un tel tirage, il y ait 5 bouteilles d'eau calcaire est d'environ 0,180.

3. Calculons la probabilité que, lors d'un tel tirage, il y ait 65 bouteilles d'eau non calcaire c'est-à-dire qu'il y ait 10 bouteilles d'eau calcaire.

   $p(X = 10) = \binom{75}{10}(0{,}07)^{10}(0{,}93)^{75-10} \approx 0{,}021$

4. Calculons $P(X \leqslant 10)$. À l'aide de la calculatrice, nous trouvons $P(X \leqslant 10) \approx 0{,}985$. Ce résultat est la probabilité qu'il y ait au plus 10 bouteilles d'eau calcaire dans ce lot.

**Partie B : Approximation de la loi binomiale par une loi normale**

On souhaite approcher la variable aléatoire $X$ définie en partie A par une variable aléatoire $Y$ suivant une loi normale.

1. **a.** Les conditions $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ sont vérifiées pour la variable aléatoire $X$

   car $n = 75$ $\quad np = 75 \times 0{,}07 = 5{,}250$ et $n(1-p) = 75 \times 0{,}93 = 69{,}750$.

   **b.** Montrons que $Y$ suit la loi normale d'espérance 5,250 et d'écart-type 2,210.

   La loi binomiale peut être approximée alors par une loi normale de paramètres $\mathbb{E}(Y) = np = 5{,}250$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{np(1-p} = \sqrt{75 \times 0{,}07 \times 0{,}93} \approx 2{,}210$.

2. Calculons $P(Y \leqslant 10)$. $P(Y \leqslant 10) \approx 0{,}975$.

   Au regard de la question **A. 4**, ce résultat était prévisible puisque les conditions d'approximation d'une loi binomiale par une loi normale étaient réunies.

3. Déterminons, en utilisant la loi de $Y$, la probabilité approchée d'avoir entre 3 et 5 bouteilles d'eau calcaire. Calculons $P(3 \leqslant Y \leqslant 5)$ À l'aide de la calculatrice, nous obtenons $\approx 0{,}301$.

**Partie C : Intervalle de fluctuation asymptotique**

Dans cette question, on s'intéresse à la concentration en calcium de l'eau d'une grande quantité de bouteilles devant être livrées à une chaîne d'hypermarchés. Le fournisseur affirme qu'il y a dans son stock 6 % de bouteilles d'eau calcaire.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 bouteilles dans cette livraison.

1. Déterminons l'intervalle $I$ de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des bouteilles d'eau calcaire dans un échantillon de 100 bouteilles prélevées comme indiqué ci-dessus.

$$I = \left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ,\ f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

$$I = \left[0{,}06 - 1,96\sqrt{\frac{0{,}06(1-0{,}06)}{100}}\ ,\ 0{,}06 + 1,96\sqrt{\frac{0{,}06(1-0{,}06)}{100}}\right] \approx [0{,}014\ :\ 0{,}106]$$

2. Dans l'échantillon prélevé, il y a 8 bouteilles d'eau calcaire soit une proportion de 0,08. Cette valeur, appartenant à l'intervalle de fluctuation, ne remet pas en cause l'affirmation du fournisseur.

**EXERCICE 4** **4 points**

En région Île de France, les alertes à la pollution atmosphérique se multiplient.
Le décret du 21 octobre 2010 relatif à la qualité de l'air et un arrêté inter-préfectoral de 2016 définissent les procédures d'information-recommandations et d'alerte du public en cas d'épisode de pollution.

**PARTIE A : Pollution à l'ozone**

| Procédure | Information-recommandations | Alerte | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1<sup>er</sup> seuil | 2<sup>e</sup> seuil | 3<sup>e</sup> seuil |
| Seuil de concentration en ozone | 180 µg· m$^{-3}$ | 240 µg· m$^{-3}$ | 300 µg· m$^{-3}$ | 360 µg· m$^{-3}$ |

*Lecture du tableau précédent* :

- *si la concentration en ozone est supérieure ou égale à* 180 $\mu$g· m$^{-3}$ *et strictement inférieure à* 240 $\mu$g· m$^{-3}$, *la procédure d'information-recommandations est déclenchée ;*
- *si la concentration en ozone est supérieure ou égale à* 240 $\mu$g· m$^{-3}$ *et strictement inférieure à* 300 $\mu$g· m$^{-3}$, *le premier seuil d'alerte est déclenché.*
- *etc.*

Les mesures en cas d'alerte visent à réduire les émissions de gaz à effet de serre et donc la concentration d'ozone. L'abaissement de la vitesse autorisée sur les voies de circulation est une de ces mesures.
Ces mesures permettent, en théorie, de réduire de 12,5 % la concentration d'ozone par jour.
Le 17 juillet, en Île de France, on relève une concentration d'ozone de 330 µg· m$^{-3}$. Une alerte est déclenchée et les mesures sont activées.
Dans la suite, on modélise l'évolution de cette concentration d'ozone après activation des mesures.

1. Vérifions que, selon ce modèle, la concentration en ozone le 18 juillet sera de 288,75 µg· m$^{-3}$. En un jour elle a baissé de 12,5 %, soit un coefficient multiplicateur de 0,875. Nous obtenons $330 \times 0{,}875 = 288{,}75$ soit le résultat demandé.

2. Pour déterminer à quelle date le premier seuil d'alerte sera levé en suivant ce modèle, résolvons :

   $330 \times (0{,}875)^n < 240$.

$$\begin{aligned} 0{,}875^n &< \frac{240}{330} \\ 0{,}875^n &< \frac{8}{11} \\ n \ln 0{,}875 &< \ln\left(\frac{240}{330}\right) \\ n &> \frac{\ln\left(\frac{8}{11}\right)}{\ln 0{,}875} \\ n &> 2{,}38 \end{aligned}$$

   Le 20 juillet le premier seuil d'alerte devrait être levé selon ce modèle .

3. On donne l'algorithme ci-dessous :

| |
|---|
| $n \leftarrow 0$ |
| $C \leftarrow 330$ |
| Tant que $C > 180$ |
| $\quad n \leftarrow n+1$ |
| $\quad C \leftarrow C \times 0{,}875$ |
| Fin Tant que |

   La valeur de $n$ à la fin de l'exécution de l'algorithme est 5.

   Ce résultat, dans le contexte de la partie A, signifie que le 22 juillet il n'y aura même plus d'information - recommandations. Aucune procédure ne sera enclenchée.

4. Pour la protection de la santé humaine, l'objectif de qualité à atteindre est une concentration d'ozone inférieure ou égale à 120 µg$\cdot$ m$^{-3}$.

   Modifions l'algorithme précédent afin qu'il détermine le nombre de jours nécessaires pour atteindre l'objectif.

| |
|---|
| $n \leftarrow 0$ |
| $C \leftarrow 330$ |
| Tant que $C > 120$ |
| $\quad n \leftarrow n+1$ |
| $\quad C \leftarrow C \times 0{,}875$ |
| Fin Tant que |

   La valeur de $n$ à la fin de l'exécution de ce nouvel algorithme est 8.

**PARTIE B : Les particules fines PM10**

Le seuil d'information-recommandations aux particules fines PM10 en suspension (diamètres inférieurs ou égaux à 10 µm) est fixé à 50 µg$\cdot$ m$^{-3}$d'air et le seuil d'alerte à 80 µg$\cdot$ m$^{-3}$.
À proximité de l'autoroute A7, les relevés suivants de particules fines PM10 en suspension ont été effectués :

13 juillet 2017 : 213 µg$\cdot$ m$^{-3}$ ;
14 juillet 2017 : 16 µg$\cdot$ m$^{-3}$.

**1.** Pour chaque date, le 13 juillet le seuil d'alerte a été dépassé $213 > 80$. En revanche le 14 juillet aucun seuil n'a été dépassé.

**2.** **a.** Calculons le pourcentage de baisse observée de la concentration en particules fines PM10 entre le 13 et le 14 juillet 2017.

Le taux d'évolution $\mathcal{T}$ est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.

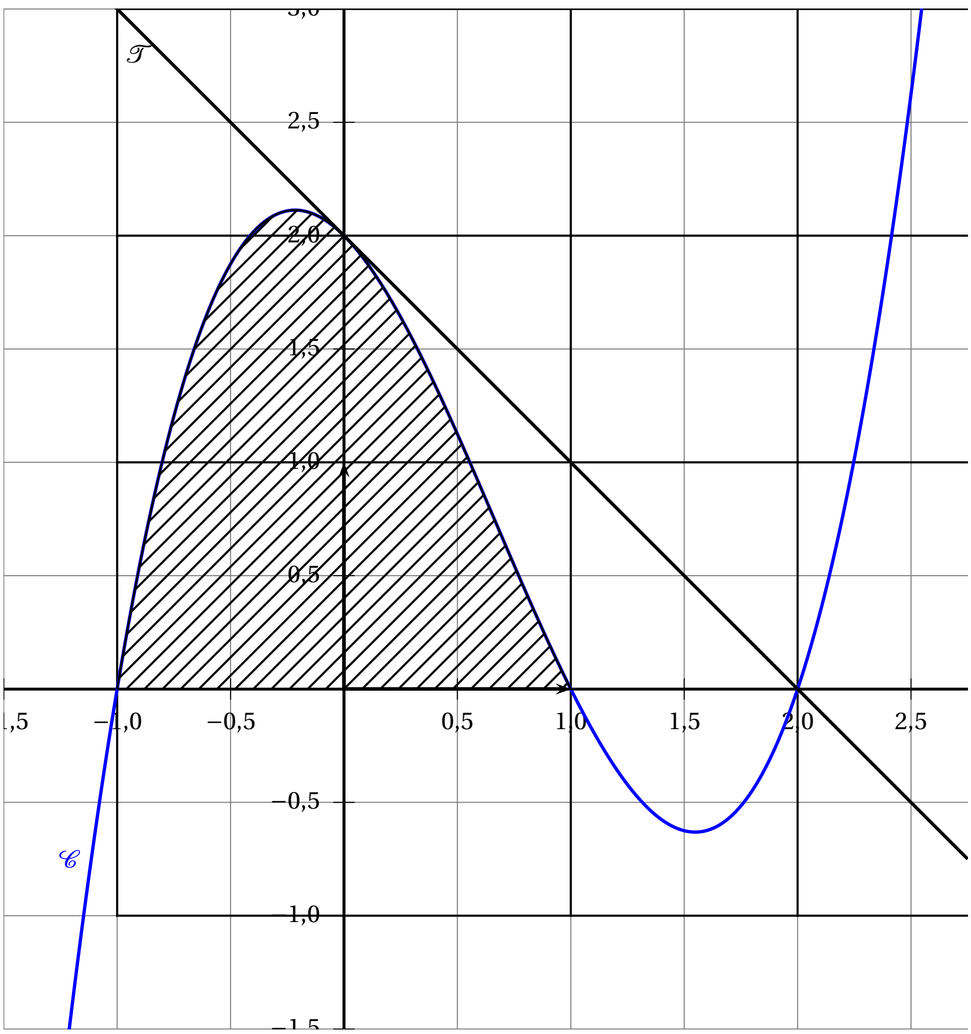
$\mathcal{T} = \dfrac{16 - 213}{213} \approx -0{,}924\,9$.

Le pourcentage de baisse observée de la concentration en particules fines PM10 entre le 13 et le 14 juillet 2017 arrondi à $10^{-2}$ % est de 92,49 %.

**b.** Proposer une explication à cette baisse.

Le 14 juillet 2017 étant un vendredi d'où pour certains une longue vacance, la circulation le jeudi dut être forte intense pour rejoindre un lieu de villégiature.

**ANNEXE 1 (Exercice 1)**



**ANNEXE 2 (Exercice 2)**

**(À rendre avec la copie)**

**Question 1. a.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i = \ln(t_i)$ (arrondi à $10^{-1}$) | 3,1 | 3,3 | 3,5 | 3,7 | 3,9 | 4,1 |
| $y_i = \ln(m_i)$ (arrondi à $10^{-2}$) | 7,19 | 7,17 | 7,14 | 7,12 | 7,09 | 7,06 |

**Questions 1. b. et 1. d.**