∽ Corrigé du baccalauréat STL biotechnologies Métropole ∾
16 juin 2017

EXERCICE 1 — 6 points

PARTIE A

Une société souhaite exploiter un nouveau détecteur qui permet de mesurer la désintégration de noyaux radioactifs. Pour tester ce détecteur, la société l'utilise pour déterminer le nombre de noyaux radioactifs présents dans un échantillon radioactif à des instants donnés. Voici les résultats des relevés réalisés au cours des heures qui ont suivi le début du test :

Nombre t_i d'heures écoulées depuis le début du test	0	2	4	6	8	10
Nombre de noyaux N_i détectés dans l'échantillon (en milliards)	500	440	395	362	316	279

1. **a.** On complète le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs à 10^{-3} :

t_i	0	2	4	6	8	10
$y_i = \ln N_i$	6,215	6,087	5,979	5,892	5,756	5,631

   b. On représente le nuage de points de coordonnées $(t_i\ ;\ y_i)$ sur l'**annexe 1**.

   c. Les points obtenus sont presque alignés donc un ajustement affine est envisageable.

   d. À l'aide de la calculatrice, on détermine une équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés sous la forme $y = at + b$, où les coefficients a et b sont arrondis à 10^{-3} : $y = -0{,}057t + 6{,}210$.

   e. On trace alors la droite $\mathscr{D}$ sur l'**annexe 1**.

2. **a.** On choisit la droite $\mathscr{D}$ comme modèle d'ajustement du nuage de points $M_i(t_i\ ;\ y_i)$.
   $y = -0{,}057t + 6{,}210 \iff \ln(N) = -0{,}057t + 6{,}210 \iff N = \mathrm{e}^{-0{,}057t+6{,}210}$
   $$\iff N = \mathrm{e}^{-0{,}057t} \times \mathrm{e}^{6{,}210} \iff N \approx 498\,\mathrm{e}^{-0{,}057t}$$

   b. La loi de désintégration assure que la fonction f, qui à tout réel t positif ou nul, associe le nombre de noyaux, en milliards, présents dans l'échantillon au bout de t heures, est définie par $f(t) = 500\,\mathrm{e}^{-0{,}06t}$.
   Le test conduit à la fonction qui à t associe $498\,\mathrm{e}^{-0{,}057t}$ qui est proche de la fonction f : on peut donc utiliser ce dispositif.

PARTIE B

On étudie à présent la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 500\,\mathrm{e}^{-0{,}06t}$.

1. On admet que : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}06t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 500\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} = 0$ ce qui équivaut à $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$
   On en déduit que la courbe représentant la fonction f admet la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) comme asymptote horizontale en $+\infty$.
2. $f'(t) = 500 \times (-0{,}06)\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} = -30\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} < 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. $f(0) = 500$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$; on déduit le tableau de variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$:

t	0		$+\infty$
$f(t)$	500	$\searrow$	0

4. **a.** Le nombre de noyaux présents dans l'échantillon 24 heures après le début du test est en milliards $f(24) \approx 118{,}463\,879\,341$ donc il y a $118\,463\,879\,341$ noyaux.

b. La moitié des noyaux présents dans l'échantillon au début du test aura disparu quand t sera tel que $f(t) = 250$; on résout cette équation :

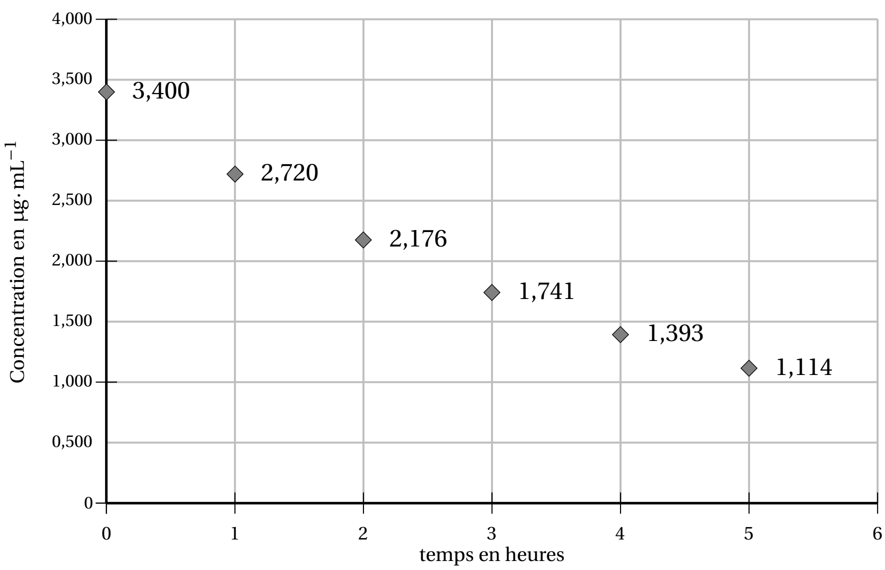
$f(t) = 250 \iff 500\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} = 250 \iff \mathrm{e}^{-0{,}06t} = 0{,}5 \iff -0{,}06t = \ln(0{,}5) \iff t = -\dfrac{\ln(0{,}5)}{0{,}06}$

Or $-\dfrac{\ln(0{,}5)}{0{,}06} \approx 11{,}6$ donc la moitié des noyaux présents aura disparu au bout de 12 heures.

EXERCICE 2 — 6 points

On s'intéresse à une modélisation de la concentration d'un médicament, injecté dans le sang d'un patient, en fonction du temps. À 7 heures du matin, on injecte le médicament au patient. Toutes les heures, on relève la concentration de médicament dans le sang, exprimée en $\mu\text{g}\cdot\text{mL}^{-1}$. À l'injection, cette concentration est égale à $3{,}4\,\mu\text{g}\cdot\text{mL}^{-1}$.

Le nuage de points ci-dessous donne la concentration de ce médicament dans le sang en fonction du temps écoulé depuis l'injection.



PARTIE A

Dans cette partie, on modélise la concentration de ce médicament par une fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

Parmi les trois modélisations proposées, une seule est correcte.

a $f : x \longmapsto 0{,}6x + 3{,}4$ **b** $g : x \longmapsto 3{,}4\,\mathrm{e}^{-0{,}223x}$ **c** $h : x \longmapsto \dfrac{9}{3+x}$

- La fonction f est croissante donc ne peut modéliser la concentration du médicament.
- $h(0) = 3 \neq 3{,}4$ donc la fonction h ne modélise pas la concentration du médicament.
- C'est donc la fonction g qui modélise la concentration du médicament.

PARTIE B

Dans cette partie, on choisit de modéliser la concentration du médicament par une suite, en prenant, pour valeurs des trois premiers termes de la suite, les valeurs données par le graphique placé avant la partie A.

1. Pour tout entier naturel n, on note C_n la concentration, exprimée en $\mu g \cdot mL^{-1}$, au bout de n heures, de ce médicament dans le sang.

a. Par lecture du graphique : $C_0 = 3{,}400$, $C_1 = 2{,}720$ et $C_2 = 2{,}176$.

b. $\dfrac{C_1}{C_0} = \dfrac{2{,}72}{3{,}4} = 0{,}8$ et $\dfrac{C_2}{C_1} = \dfrac{2{,}176}{2{,}72} = 0{,}8$ donc C_0, C_1 et C_2 sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $C_0 = 3{,}4$.

On admet qu'à chaque heure, la concentration du médicament restante baisse de 20 %.

2. Baisser de 20 %, c'est multiplier par 0,8 donc la suite (C_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $C_0 = 3{,}4$ donc, pour tout n, $C_n = C_0 \times q^n = 3{,}4 \times 0{,}8^n$.

3. La suite (C_n) est géométrique de raison 0,8 et $0 < 0{,}8 < 1$ donc la suite (C_n) a pour limite 0 quand n tend vers l'infini.

La concentration du médicament tend vers 0 quand le temps augmente indéfiniment.

4. Soit l'algorithme suivant :

```
Variables :
    n entier naturel
    C réel
Initialisation :
    Affecter à n la valeur 0
    Affecter à C la valeur 3,4
Traitement :
    Tant que C est supérieur à 1
        Affecter à n la valeur n + 1
        Affecter à C la valeur 0,8 × C
    Fin tant que
Sortie :
    Afficher n
```

Dans l'algorithme, la variable C correspond à la concentration C_n au bout de n heures.

On fait tourner l'algorithme en arrondissant les résultats au centième :

n	0	1	2	3	4	5	6
C_n	3,4	2,72	2,18	1,74	1,39	1,11	0,89

Au bout de 6 heures, la concentration du médicament devient inférieure à 1 $\mu g.mL^{-1}$.

Remarque - On peut aussi résoudre l'inéquation $C_n \leqslant 1$ c'est-à-dire $3{,}4 \times 0{,}8^n \leqslant 1$.

5. Pour des raisons d'efficacité, le patient reçoit immédiatement une nouvelle injection de médicament dès que, lors d'un relevé à une heure donnée, la concentration $\boldsymbol{c}$ du médicament dans le sang est inférieure ou égale à $1\,\mu g \cdot mL^{-1}$. À la nouvelle injection, la concentration du médicament dans le sang est alors égale à $\boldsymbol{c} + 3{,}4\,\mu g \cdot mL^{-1}$.

a. Le patient devra-t-il recevoir une deuxième injection dès la 6e heure.

b. d'après le tableau de la question précédente, la 6e heure avant la deuxième injection le taux de médicament dans le sang est de 0,89 $\mu g.mL^{-1}$; après la deuxième injection, la concentration est de $0{,}89 + 3{,}4 = 4{,}29$ soit en arrondissant : 4,3 $\mu g.mL^{-1}$

c. On continue le processus, en arrondissant au dixième :

n	6	7	8	9	10	11	12	13
Concentration	4,3	3,4	2,7	2,2	1,8	1,4	1,1	0,9

Il faudra donc procéder à une troisième injection dès la 13[e] heure.

Remarque - On peut également résoudre l'inéquation d'inconnue n : $4{,}3 \times 0{,}8^n \leqslant 1$.

EXERCICE 3 — 4 points

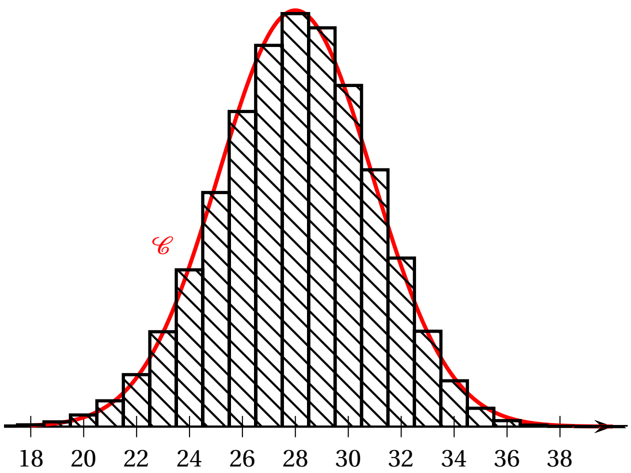
La Direction de la recherche, des études, de l'évaluation et des statistiques (Drees) affirme qu'en France : 7 adultes sur 10 portent des lunettes. On prélève au hasard un échantillon de 40 adultes parmi la population française. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe le nombre de porteurs de lunettes dans l'échantillon.

1. **a.** Le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise, donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de porteurs de lunettes suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = \dfrac{7}{10} = 0{,}7$.

b. La probabilité qu'il y ait au moins 30 porteurs de lunettes dans un tel échantillon de 40 adultes est $p5X \geqslant 30)$; à la calculatrice, on trouve, arrondi à 10^{-3}, 0,309.

On admet que la loi binomiale de la variable aléatoire X précédente peut être approchée par une loi normale de paramètres µ et σ.

2. On a représenté ci-dessous un diagramme en bâtons et une courbe $\mathscr{C}$. L'une de ces deux représentations est la représentation de la loi binomiale suivie par X ; l'autre celle de la loi normale de paramètres µ et σ.



a. La loi binomiale est associée au diagramme en bâtons car c'est une loi discrète.

La loi normale est continue, elle est donc associée à la courbe $\mathscr{C}$.

b. La courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \mu$; par lecture graphique on peut dire que $\mu = 28$.

c. On affirme que l'écart type σ de la loi normale est égal à 8.

On sait que, si X suit une loi normale de paramètres μ et σ, $p(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}68$, ce qui donnerait avec $\mu = 28$ et $\sigma = 8$: $p(20 \leqslant X \leqslant 36) \approx 0{,}68$.

Il faudrait donc que l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 20$ et $x = 28$ soit égale à 0,68, sachant que l'aire totale sous la courbe est égale à 1. C'est mainfestement faux donc l'écart-type n'est pas égal à 8.

3. **a.** $n = 40 \geqslant 30$, $np = 40 \times 0,7 = 28 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 40 \times 0,3 = 12 \geqslant 5$ donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 % :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right] =$$

$$\left[0,7 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,7 \times 0,3}{40}}\ ;\ 0,7 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,7 \times 0,3}{40}}\right] \approx [0,558\ ;\ 0,842]$$

b. Dans un échantillon de 40 adultes en France, on compte 24 porteurs de lunettes, ce qui fait une fréquence de $f = \dfrac{24}{40} = 0,6$.

$f \in I$ donc cet échantillon ne remet pas en cause l'affirmation de la Drees.

EXERCICE 4 — 4 points

Soient les fonctions f et g définies sur $[0\ ;\ 7]$ par $f(x) = 20x\,\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = 20x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.
On note C_f et C_g les courbes représentatives respectives des fonctions f et g représentées en **annexe 2**.

1. On note :

— D_1 l'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$;

— D_2 l'aire du domaine délimité par les courbes C_g, C_f et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 6$.

a. On hachure les domaines D_l et D_2 sur le graphique donné en **annexe 2**.

b. On encadre la première surface par deux trapèzes de même hauteur 2 et de bases respectives 3 et 7 pour l'intérieur (en vert) et 3 et 8 pour l'extérieur (en rouge), ce qui donne :

$$\frac{3+7}{2} \times 2 = 10 < D_1 < \frac{3+8}{2}2 = 11.$$

La deuxième surface est plus délicate à encadrer. En utilisant pour l'intérieur les points de coordonnées (3; 3) (3; 9) (4,5; 4,5) (6; 1,5) (6; 0,5) (4,5; 1) et pour l'extérieur les points de coordonnées (3; 3) (3; 9) (4,5; 4,5) (6; 1,5) (6; 0,5) (4,5; 1) on obtient l'encadrement

$$10,625 < D_2 < 11,5.$$

On trouve donc une aire proche de 11.

2. La commande $Int(f(x),x,a,b)$ d'un logiciel de calcul formel permet de calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. On obtient alors les résultats suivants pour quatre intégrales :

1	$Int(20x\,\mathrm{e}^{-x},x,1,2)$
	$40\,\mathrm{e}^{-1}-60\,\mathrm{e}^{-2}$
2	$Int(20x\,\mathrm{e}^{-x},x,2,3)$
	$60\,\mathrm{e}^{-2}-80\,\mathrm{e}^{-3}$
3	$Int(20x\,\mathrm{e}^{-x},x,3,6)$ $80\,\mathrm{e}^{-3}-140\,\mathrm{e}^{-6}$
4	$Int(20x^2\,\mathrm{e}^{-x},x,3,6)$ $340\,\mathrm{e}^{-3}-1\,000\,\mathrm{e}^{-6}$

a. La fonction f est positive sur $[1\,;\,3]$ donc $D_1=\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$:

$D_1=\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\left(40\,\mathrm{e}^{-1}-60\,\mathrm{e}^{-2}\right)+\left(60\,\mathrm{e}^{-2}-80\,\mathrm{e}^{-3}\right)$

$=40\,\mathrm{e}^{-1}-80\,\mathrm{e}^{-3}$ U.A.

La fonction g est supérieure à f sur $[3\,;\,6]$ donc $g-f>0$ et donc $D_2=\displaystyle\int_3^6\left(g(x)-f(x)\right)\,\mathrm{d}x$:

$D_2=\displaystyle\int_3^6\left(g(x)-f(x)\right)\,\mathrm{d}x=\int_3^6 g(x)\,\mathrm{d}x-\int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x=$

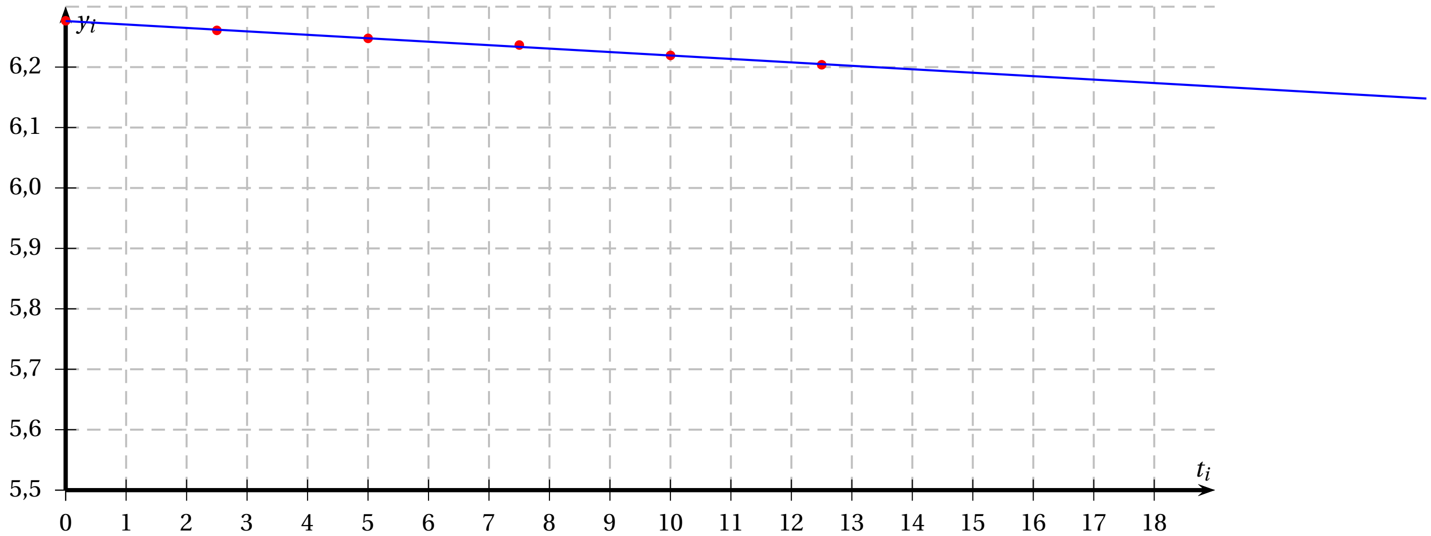
$D_2=\left(340\,\mathrm{e}^{-3}-1\,000\,\mathrm{e}^{-6}\right)-\left(80\,\mathrm{e}^{-3}-140\,\mathrm{e}^{-6}\right)=340\,\mathrm{e}^{-3}-1\,000\,\mathrm{e}^{-6}-80\,\mathrm{e}^{-3}+140\,\mathrm{e}^{-6}=$

$D_2=260\,\mathrm{e}^{-3}-860\,\mathrm{e}^{-6}$ U.A.

b. $D_1=40\,\mathrm{e}^{-1}-80\,\mathrm{e}^{-3}\approx 10{,}73$ et $D_2=260\,\mathrm{e}^{-3}-860\,\mathrm{e}^{-6}\approx 10{,}81$ donc $D_1<D_2$.

Annexe 1 (exercice 1)

(À rendre avec la copie)



Annexe 2 (exercice 4)

(À rendre avec la copie)