Baccalauréat STL spécialité biotechnologies Métropole
6 septembre 2018

EXERCICE 1 **(6 points)**

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à l'unité, sauf mention contraire.

Cyprien et Cloé, élèves de Terminale STL Biotechnologies, s'intéressent au protocole d'un examen d'imagerie médicale, qui nécessite de préparer une dose de produit radioactif. Ils disposent du tableau suivant, qui donne le nombre de milliards de noyaux radioactifs présents dans le produit préparé en fonction du temps t, exprimé en minutes.

Temps en minutes : t_i	0	20	40	60	80	100	120
Nombre de milliards de noyaux radioactifs : y_i	8 000	7 400	6 800	6 300	5 800	5 400	4 900

Au moment de son injection au patient, le produit ne doit pas contenir plus de 2 600 milliards de noyaux radioactifs. Cyprien et Cloé souhaitent alors déterminer combien de temps, une fois le produit prêt, il faut attendre avant de l'injecter au patient.

Partie A

Cyprien propose d'utiliser un ajustement affine.

1. Le nuage de points de coordonnées (t_i, y_i) est représenté dans le repère fourni en **annexe, à rendre avec la copie**.
2. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés est $y = -25{,}5t + 7903{,}6$.
3. Cyprien admet que pendant les quatre heures suivant la préparation du produit, le nombre y de milliards de noyaux radioactifs encore présents dans le produit peut être modélisé par $y = -26t + 7900$ où t est le temps, exprimé en minutes, écoulé depuis que le produit a été préparé.
   - **a.** La droite d d'équation $y = -26t + 7900$ est tracée sur le graphique précédent.
   - **b.** Cyprien utilise alors ce modèle pour déterminer, combien de temps, une fois le produit prêt, il faut attendre avant de l'injecter au patient. Pour déterminer le temps qu'il faudra attendre, résolvons $-26t + 7900 < 2600$. $t > \dfrac{7900 - 2600}{26}$ or $\dfrac{7900 - 2600}{26} \approx 203{,}85$. Cyprien trouve qu'il lui faudra attendre presque 204 minutes.
   - **c.** Une nouvelle mesure est fournie à Cyprien : au bout de 240 minutes, le nombre de milliards de noyaux radioactifs présents dans le produit préparé est égal à 3 100.
     Cette mesure remet en cause le modèle utilisé par Cyprien parce que, selon le modèle qu'il a choisi, le nombre de milliards de noyaux radioactifs a chu beaucoup plus vite qu'en réalité.

Partie B

Cloé remet en cause le modèle utilisé par Cyprien. L'examen exploitant un produit radioactif, elle préfère utiliser un ajustement exponentiel : le nombre y de milliards de noyaux radioactifs encore présents dans le produit peut être modélisé par $y = A_0\mathrm{e}^{-kt}$ où t est le temps, exprimé en minutes, écoulé depuis que le produit a été préparé, A_0 et k étant deux réels strictement positifs.

1. Pour permettre de déterminer des valeurs prises par les réels A_0 et k nous pouvons considérer que la courbe représentative de $t \mapsto A_0\mathrm{e}^{-kt}$ passe par les points extrêmes du tableau c'est-à-dire en résolvant le système $\begin{cases} A_0\mathrm{e}^{0} = 8000 \\ A_0\mathrm{e}^{-240k} = 4900 \end{cases}$.

   Nous trouvons alors $A_0 = 8000$ et $k \approx 0{,}0041$

2. Dans ce qui suit, on prend $A_0 = 8\,000$ et $k = 0{,}0039$.

Cloé utilise alors ce modèle pour déterminer, combien de temps, une fois le produit prêt, il faut attendre avant de l'injecter au patient.

Pour déterminer ce temps résolvons $8\,000\,\mathrm{e}^{-0{,}0039x} < 2\,600$

$$8000\mathrm{e}^{-0{,}0039x} < 2\,600$$
$$\mathrm{e}^{-0{,}0039x} < \frac{2\,600}{8\,000}$$
$$\ln \mathrm{e}^{-0{,}0039x} < \ln\frac{13}{40}$$
$$-0{,}0039x < \ln\frac{13}{40}$$
$$x > \frac{\ln\frac{13}{40}}{-0{,}0039}$$
$$\frac{\ln\frac{13}{40}}{-0{,}0039} \approx 288{,}187$$

Cloé trouve un temps supérieur à 288 minutes.

EXERCICE 2 **(7 points)**

Les deux parties de cet exercice peuvent se traiter de façon indépendante.

Partie A

En 2017, une étude menée dans une ville a montré que la consommation d'eau par an et par habitant s'élevait à $50\,\mathrm{m}^3$. On suppose que, dans les années qui suivront, cette consommation baissera de 2,1 % par an.

1. On considère l'algorithme suivant :

```
n ← 0
u ← 50
Tant que u > 47
u ← u × 0,979
n ← n + 1
Fin Tant que
n ← n + 2017
```

a. Déterminons la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme.

n	0	1	2	3	4
u	50	48,95	47,92	46,91	
	vraie	vraie	vraie	fausse	

Par conséquent, à la fin de l'algorithme n vaut 2020.

b. La consommation d'eau par an et par habitant dans cette ville en 2020 sera strictement inférieure à $47\,\mathrm{m}^3$.

2. On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente la consommation d'eau, en m^3, par an et par habitant, dans cette ville en $2017 + n$.

a. À une diminution de 2,1 % correspond un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{2.1}{100}$ soit 0,979. La suite (u_n) est géométrique de raison 0,979 et de premier terme 50 puisque nous passons d'un terme au suivant en le multipliant par un même nombre.

b. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times (q)^n$. Il en résulte $u_n = 50 \times (0{,}979)^n$.

c. Avec ce modèle, déterminons la consommation d'eau prévue par an et par habitant en 2021.

Le rang de l'année est 4. En remplaçant n par 4 dans la relation précédente, nous obtenons $u_4 = 50 \times (0,979)^4 \approx 45,93$.

Nous pouvons prévoir en 2021, selon ce modèle, une consommation d'eau, arrondie à $0,1\,\text{m}^3$, d'environ $45,9\,\text{m}^3$.

3. On s'intéresse à la consommation totale d'eau par habitant depuis le début de l'année 2017.

Déterminons à partir de quelle année cette consommation totale d'eau dépassera $500\,\text{m}^3$. Pour ce faire, calculons la consommation d'eau depuis 2017.

$\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} u_i = 50 \times \frac{1-0,979^{n+1}}{1-0,979}$. Déterminons n pour que cette somme soit supérieure à $500\,\text{m}^3$.

$$\begin{aligned}
50 \times \frac{1-0,979^{n+1}}{1-0,979} &\geqslant 500\\
\frac{1-0,979^{n+1}}{0,021} &\geqslant 10\\
1-0,979^{n+1} &\geqslant 10 \times 0,021\\
0,979^{n+1} &\leqslant 1-0,21
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0,979^{n+1} &\leqslant 0,79\\
\ln\left(0,979^{n+1}\right) &\leqslant \ln(0,79)\\
(n+1)\ln(0,979) &\leqslant \ln(0,79)\\
n+1 &\geqslant \frac{\ln(0,79)}{\ln(0,979)}\\
n &\geqslant \frac{\ln(0,79)}{\ln(0,979)} - 1
\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln(0,79)}{\ln(0,979)} - 1 \approx 10,1066$

À partir de 2028, la consommation totale d'eau aura dépassé $500\,\text{m}^3$.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-4}.

On sait qu'en 2017, 37 % des logements de la ville étaient équipés de systèmes de réduction de la consommation d'eau (robinets mousseurs, récupérateurs d'eau de pluie, ...).

1. On considère un échantillon de 1 000 logements pris au hasard parmi les logements de la ville, suffisamment nombreux pour assimiler le choix de cet échantillon à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de logements de l'échantillon qui étaient équipés de systèmes de réduction de la consommation d'eau en 2017.

a. La loi suivie par la variable aléatoire X est la loi binomiale de paramètres $(n = 1000, p = 0,37)$. Il y a répétition de 1 000 tirages indépendants et identiques caractérisés par deux issues soit le choix d'un logement de la ville équipé de systèmes de réduction de la consommation d'eau de probabilité 0,37 soit le choix d'un logement de la ville non équipé de systèmes de réduction de la consommation d'eau de probabilité $1-0,37$.

b. La probabilité qu'il y ait plus de 400 logements dans l'échantillon qui étaient équipés de tels systèmes de réduction de la consommation d'eau en 2017 est p(X> 400). À l'aide de la calculatrice, nous obtenons $P(X > 400) \approx 0,0233$.

2. On décide d'approcher la variable aléatoire X par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale de paramètres μ= 370 et σ= 15,27.

a. Vérifions les conditions pour que la loi binomiale soit approchée par la loi normale de paramètre μ= np et d'écart-type $\sqrt{np(1-p)}$.

$n > 30$; $np = 370 > 5$ $np(1-p) = 233,1 > 5$.

Les valeurs choisies pour μ et σ correspondent à ces valeurs.

b. Calculons la probabilité $P(Y \leqslant 350)$. $P(Y \leqslant 350) \approx 0,0951$.

Le résultat obtenu est la probabilité qu'il y ait moins de 350 logements de la ville équipés de systèmes de réduction de la consommation d'eau (robinets mousseurs, récupérateurs d'eau de pluie, …).

EXERCICE 3 **(7 points)**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Un antibiotique est une substance chimique organique inhibant ou tuant des bactéries pathogènes.

Partie A

Un laboratoire affirme que 48 % de toutes les souches bactériennes sont résistantes aux antibiotiques.
Dans un échantillon de 50 souches bactériennes prises au hasard, on constate que 29 souches sont résistantes.
Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion observée est :

$$\left[p-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ,\ p+1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$\left[0,48-1,96\sqrt{\frac{0,48(1-0,48)}{50}}\ ,\ 0,48+1,96\sqrt{\frac{0,48(1-0,48)}{50}}\right]=[0,34;0,61]$$

$\frac{29}{50}=0,58$ appartenant à l'intervalle de fluctuation, cela ne remet pas en cause l'affirmation du laboratoire.

Partie B

On injecte un antibiotique à un patient. On modélise cette situation par une fonction f qui, à tout temps t, exprimé en heures, écoulé depuis l'injection, associe la concentration, exprimée en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$, de l'antibiotique dans le sang du patient.
Cette fonction f est définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f(t)=\frac{8t}{t^2+1}.$$

1. On admet que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.

a. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$ la courbe représentative de la fonction f admet l'axe des abscisses comme asymptote.

b. La valeur de la limite dans le contexte de l'exercice signifie que l'antibiotique tend à disparaître.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. On admet que pour tout réel t positif ou nul, on a : $f'(t)=\frac{8(1-t)(1+t)}{(t^2+1)^2}$.

Étudions le signe de f' sur $[0\ ,\ +\infty[$

Puisque t est positif $t+1$ est strictement positif et $\frac{8(1+t)}{(1+t)^2}$ de même, il en résulte que sur cet intervalle, le signe de f' est celui de $1-t$. Sur $\mathbb{R}$, $1-t>0$ est équivalent à $t<1$.
Par conséquent si $t \in [0\ ;\ 1[$, $f'(t)>0$ et si $t \in]1\ ;\ +\infty[$, $f'(t)<0$.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x)>0$ alors f est strictement croissante sur I.

Sur $[0\ ;\ 1[$, $f'(x)>0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x)<0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Sur $]1\ ;\ +\infty[$, $f'(x)<0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Dressons le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	0	↗	4	↘	0

b. La concentration de l'antibiotique est maximale lorsque la fonction admet un maximum c'est-à-dire au bout d'une heure. Cette concentration maximale est de $4\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.

3. En antibiothérapie, on définit la CMI comme la concentration minimale d'antibiotique permettant d'empêcher la multiplication bactérienne. La CMI de l'antibiotique injecté est égale à $2{,}4\ \text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.

a. Montrons que, pour tout réel t positif ou nul, $f(t) - 2,4 = \dfrac{-2,4t^2+8t-2,4}{t^2+1}$.

$f(x) - 2,4 = \dfrac{8t}{t^2+1} - 2,4 = \dfrac{8t - 2{,}4(t^2+1)}{(1+t^2)} = \dfrac{-2,4t^2+8t-2,4}{t^2+1}$.

Nous retrouvons bien le résultat demandé.

b. Étudions le signe de cette expression sur l'intervalle $[0\ ,\ +\infty[$. Le dénominateur étant strictement positif le signe de l'expression est celui du numérateur. Mettons $-2,4$ en facteur au préalable. $-2,4\left(t^2 - \dfrac{10}{3}t + 1\right)$. $t^2 - \dfrac{10}{3}t+1$ est un trinôme du second degré.

Calculons le discriminant Δ.

$\Delta = \left(\dfrac{-10}{3}\right)^2 - 4\times 1\times 1 = \dfrac{100}{9} - 4 = \dfrac{100-36}{9} = \dfrac{64}{9}$.

$\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a ($a = 1$)pour les valeurs extérieures aux racines et de $-a$ pour les valeurs comprises entre les racines.

Calculons les racines. $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_1 = \dfrac{-(\frac{-10}{3}) - \sqrt{\frac{64}{9}}}{2\times 1} = \dfrac{\frac{10}{3}-\frac{8}{3}}{2} = \dfrac{1}{3}$ $\qquad x_2 = 3$

x	0		1/3		3		$+\infty$
signe de $t^2 - 10/3t+1$		+	0	−	0	+	
signe de $f(t) - 2.4$		−	0	+	0	−	

c. La concentration de l'antibiotique injecté est supérieure à sa CMI entre 20 minutes $\left(\frac{1}{3}\text{h}\right)$ et 3 heures ce qui correspond bien à 2 h 40.

4. **a.** La fonction F définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par $F(t) = 4\ln(t^2+1)$ est une primitive de f sur cet intervalle lorsque $F' = f$. Dérivons F. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u} \quad u > 0$

$F'(t) = 4\times\dfrac{2t}{t^2+1} = \dfrac{8t}{t^2+1} = f(t)$

b. Calculons alors J. $J = \displaystyle\int_0^{12} f(t)\,\text{d}t = \left[4\ln(t^2+1)\right]_0^{12} = 4\ln(12^2+1) - (4\ln 1) = 4\ln 145$.

c. On admet que la valeur moyenne de la concentration de l'antibiotique en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ durant les douze premières heures après l'injection est égale à $\dfrac{1}{12}J$.

Déterminons cette valeur moyenne : $\dfrac{1}{12}J = \dfrac{1}{12}\times(4\ln 145) = \dfrac{\ln 145}{3} \approx 1{,}6589$.

La valeur moyenne de la concentration durant les douze premières heures, arrondie au centième, est de $1{,}66\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.

EXERCICE 1 : annexe à rendre avec la copie