∽ Corrigé du baccalauréat STL biotechnologies ∾
Métropole – La Réunion – 7 septembre 2017

EXERCICE 1 (4 points)

1. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[4\,;\,9]$, alors la probabilité $P(X \geqslant 5)$ est égale à :

   a. $\dfrac{5}{9}$; **b.** $\boxed{0,8}$ **c.** une valeur autre que $\dfrac{5}{9}$ et 0,8.

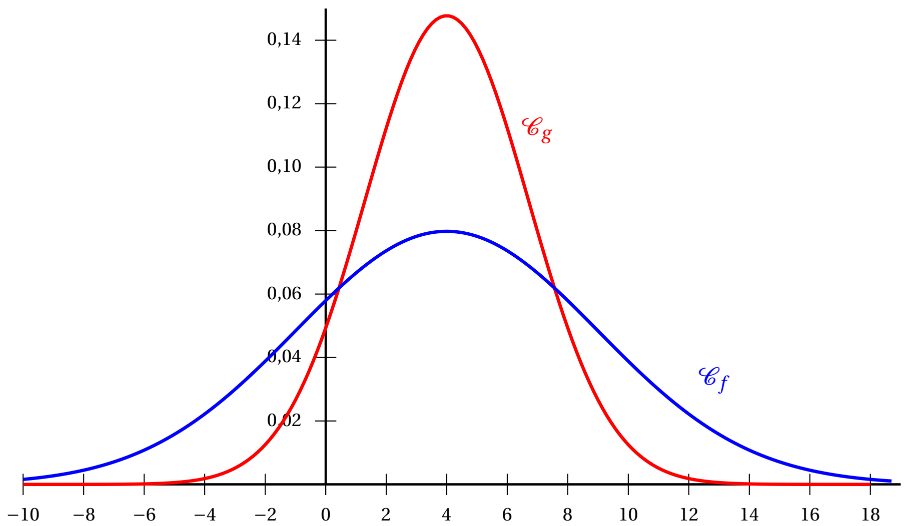
   Si X suit une loi uniforme sur $[4\,;\,9]$, $P(X \geqslant 5) = P(5 \leqslant X \leqslant 9) = \dfrac{9-5}{9-4} = 0,8$.

2. Une variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 15 et d'écart type 4 alors la probabilité $P(Y \geqslant 17)$ est :

   a. $\boxed{\text{supérieure à } 0,25}$ **b.** inférieure à 0,15 ; **c.** supérieure à 0,75.

   À la calculatrice, on trouve $P(X \geqslant 17) \approx 0,31$.

3. Dans le repère ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représente la fonction de densité f d'une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance µ et d'écart type σ. De même, la courbe $\mathscr{C}_g$ représente la fonction de densité g d'une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance µ′ et d'écart type σ'.



   D'après le graphique. on a :

   a. $\boxed{\mu = \mu' \text{ et } \sigma > \sigma'}$ **b.** $\mu < \mu'$ et $\sigma = \sigma'$; **c.** $\mu = \mu'$ et $\sigma < \sigma'$.

   Les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 4$ donc $\mu = \mu' = 4$.
   L'écart-type mesure la dispersion autour de la moyenne donc, plus il est grand, plus la courbe est étalée autour de la moyenne; la courbe $\mathscr{C}_f$ est plus étalée que la courbe $\mathscr{C}_g$ donc $\sigma > \sigma'$.

4. La loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0,96$ peut être approximée par la loi normale d'espérance µ et d'écart type σ avec :

   a. $\mu = 144$ et $\sigma = 5,76$; **b.** $\mu = 150$ et $\sigma = 2,4$; **c.** $\boxed{\mu = 144 \text{ et } \sigma = 2,4}$

   Une loi binomiale de paramètres n et p peut être approximée par une loi normale d'espérance np et d'écart-type $\sqrt{np(1-p)}$. Ici : $np = 150 \times 0,96 = 144$ et $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{150 \times 0,96 \times 0,04} = 2,4$.

EXERCICE 2 (4 points)

Une solution contient initialement 5 millions de bactéries par mL. Toutes les 10 minutes, la concentration en bactéries augmente de 15 %.

1. Pour tout entier naturel n, on note c_n la concentration en bactéries en millions par mL au bout de n dizaines de minutes.

a. Augmenter de 15 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{15}{100}=1{,}15$; donc la suite (c_n) est géométrique de raison $q=1{,}15$ et de premier terme $c_0=5$.

b. En 1 heure 30, il y a 9 périodes de 10 minutes ; pour avoir la concentration au bout d'une heure et demie, il faut déterminer c_9.

La suite (c_n) est géométrique de raison $q=1{,}15$ et de premier terme $c_0=5$ donc, pour tout n, $c_n=c_0\times q^n=5\times 1{,}15^n$.

Donc $c_9=5\times 1{,}15^9\approx 17{,}6$ millions de bactéries par mL.

c. Pour que la concentration dépasse 20 millions par mL, il faut chercher n tel que $c_n>20$ c'est-à-dire tel que $5\times 1{,}15^n>20$.
On cherche à la calculatrice à partir de $c_9=17{,}6$ et on trouve que $c_{10}=20{,}24>20$.

La concentration dépasse 10 millions de bactéries par mL au bout de $10\times 10=100$ minutes.

Les phages sont des virus infectant les bactéries ; ils peuvent donc servir d'agents antibactériens.

2. On introduit des phages au bout de 90 minutes. Cette introduction de phages provoque une diminution globale de la concentration en bactéries de 40 % toutes les dix minutes. On souhaite connaître le temps nécessaire pour que la concentration en bactéries devienne inférieure à 10 % de la concentration initiale. Pour ce faire, on utilise l'algorithme ci-dessous.

```
Variables : I entier, C réel
Traitement :
    C prend la valeur 17,6
    I prend la valeur 0
      Tant que C > 0,5
        I prend la valeur I + 1
        C prend la valeur C × 0,6
      Fin Tant Que
Sortie : Afficher I et C
```

a.
- On introduit les phages au bout de 90 minutes, c'est-à-dire quand la concentration est de 17,6 millions de bactéries par mL (question **1.a.**) ; donc on initialise C à 17,6.
- On veut que la concentration en bactéries soit inférieure à 10 % de la concentration initiale qui était de 5 ; donc il faut que la concentration soit inférieure ou égale à 10 % de 5, c'est-à-dire 0,5. On fait donc tourner l'algorithme tant que $C>0{,}5$.

b. On fait tourner l'algorithme en arrondissant les valeurs au dixième :

I	0	1	2	3
C	17,6	10,6	6,3	3,8

Donc pour $I=3$, c'est-à-dire au bout de 3×10 minutes, la concentration de bactéries sera passée en dessous de 0,5 millions de bactéries par mL.

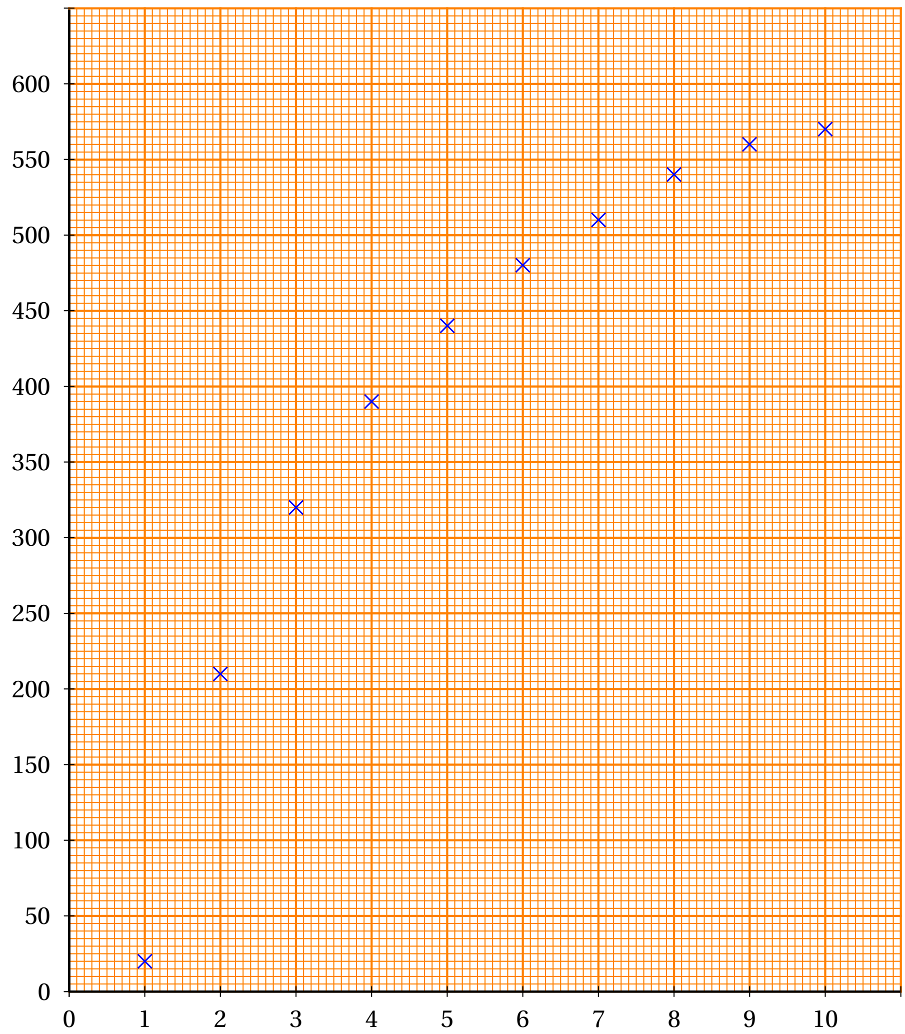
EXERCICE 3 **(5 points)**

Partie A

Chez un ostréiculteur (producteur d'huîtres) d'un village au bord de l'Atlantique, la bactérie appelée *vibrio estuarianus* est apparue à partir du mois d'août 2014. Le tableau ci-dessous donne la quantité y_i (exprimée en tonnes) d'huîtres affectées par cette bactérie dans son élevage en fonction de x_i qui représente le numéro du mois depuis l'apparition de la bactérie. Le numéro 1 correspond au mois d'août 2014, le numéro 2 correspond au mois de septembre 2014, ...

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	20	210	320	390	440	480	510	540	560	570

1. **a.** On représente graphiquement ce nuage de points :



b. Les points ne sont pas alignés donc un ajustement affine ne semble pas pertinent.

2. On pose : $z_i = \dfrac{750}{750 - y_i}$. On complète le tableau suivant en arrondissant au centième :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_i	1,03	1,39	1,74	2,08	2,42	2,78	3,13	3,57	3,95	4,17

3. **a.** On réalise alors un ajustement affine de ce nouveau nuage de points $\mathrm{M}_i(x_i\ ;\ z_i)$.
En arrondissant les coefficients à 10^{-4}, on obtient à la calculatrice :
$z = 0{,}3566x + 0{,}6647$.

b. Le mois de décembre 2015 correspond à $x = 17$ donc $z = 0{,}3566 \times 17 + 0{,}6647 = 6{,}7269$.
On cherche alors y tel que :
$\dfrac{750}{750-y} = 6{,}7269 \iff 750 = 6{,}7269(750-y) \iff \dfrac{750}{6{,}7269} = 750 - y \iff$
$y = 750 - \dfrac{750}{6{,}7269}$
donc en arrondissant à la dizaine de tonnes, $y \approx 640$.
En décembre 2015 on peut estimer à 640 tonnes le nombre d'huîtres affectées par la maladie.

Partie B

Depuis le mois de janvier 2015, on tente d'éradiquer cette bactérie à l'aide d'un antibiotique mis au point par un laboratoire pharmaceutique. Le directeur de ce laboratoire affirme que cet antibiotique permet de sauver 76 % des huîtres affectées par cette bactérie.

1. $n = 2000 \geqslant 30$; $p = 0{,}76$ donc $np = 760 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 240 \geqslant 5$.
Les conditions sont vérifiées, donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence d'huîtres sauvées par l'utilisation de l'antibiotique dans un échantillon de 1 000 huîtres :
$\left[p - 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0{,}76 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}76\times 0{,}24}{1000}}\ ;\ 0{,}76 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}76\times 0{,}24}{1000}}\right]$
$\approx [0{,}734\ ;\ 0{,}786]$

2. L'ostréiculteur décide d'utiliser cet antibiotique sur un lot de 1 000 huîtres de son élevage affectées par cette bactérie. Il constate, qu'après l'utilisation de cet antibiotique, 74 % des huîtres ont été sauvées.
La fréquence observée de 0,74 appartient à l'intervalle de fluctuation donc il n'y a pas de raison, au risque de 5 %, de remettre en question l'affirmation du directeur.

EXERCICE 4 (7 points)

1. Soit la fonction g définie sur $[0\ ;\ 10]$ par $g(x) = 60x\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient deux expressions de la dérivée de la fonction g :

1	g(x) := 60 ∗ x ∗ exp(−0.5 ∗ x)
	//interprète g //Succès lors de la compilation g
	$x \to 60 * x * \exp((-0.5) * x)$
2	deriver (g(x))
	$60 * \exp(-0.5 * x) - 30 * x * \exp(-0.5 * x)$
3	factor(deriver g(x))
	$-30 * (x-2) * \exp(-0.5 * x)$

a. D'après le logiciel de calcul formel, $g'(x) = -30(x-2)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$; on en donne le tableau de signes sur $[0\ ;\ 10]$:

x	0		2		10
-30		$-$		$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{e}^{-0,5x}$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

b. $g(0 = 0$; $g(2) = 120\,\mathrm{e}^{-1} \approx 44,15$ et $g(10) = 600\,\mathrm{e}^{-5} \approx 4,0$

On établit le tableau de variation de la fonction g sur $[0\,;\,10]$:

x	0		2		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$120\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$600\,\mathrm{e}^{-5}$

2. Un laboratoire teste l'efficacité d'une nouvelle crème solaire. Pour cela, il mesure le taux d'hydratation, en pourcentage, de la peau d'une personne, qui est exposée au soleil pendant 10 heures. On admet que pour tout réel t de $[0\,;\,10]$, $g(t)$ est le taux d'hydratation de la peau au bout de t heures après l'application de la crème.

a. Le taux d'hydratation de la peau au bout d'une demi-heure après l'application de la crème est $g(0,5) = 60 \times 0,5\,\mathrm{e}^{-0,5\times 0,5} = 30\,\mathrm{e}^{-0,25} \approx 23,4\,\%$.

b. D'après l'étude de la fonction g, le taux d'hydratation est maximal pour $t = 2$ heures.

c. On peut commercialiser cette crème si le taux d'hydratation dépasse 30 % pendant une durée d'au moins 3 heures.

D'après le graphique, le taux d'hydratation est supérieur à 30 % pour t compris entre environ 0,7 et 4,3 donc pour une durée d'environ $4,3 - 0,7 = 3,6$ heures.

On peut donc commercialiser la crème.

3. Un chercheur du laboratoire étudie l'élimination au contact de la lumière d'un composant de la crème solaire. La concentration de ce composant est modélisée par une fonction f.

Lorsque t représente le temps d'exposition à la lumière en heures, $f(t)$ représente la concentration en $\mathrm{g{\cdot}L^{-1}}$ de ce composant restant dans la crème. On admet que la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' + 0,4y = 0.$$

a. On sait qu'à l'instant $t = 0$, la concentration du composant est égale à $1,3\,\mathrm{g\cdot L^{-1}}$.

Une équation différentielle de premier ordre du type $y' + ay = 0$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-at}$ où k est un réel quelconque.

Donc l'équation différentielle $y' + 0,4y = 0$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0,4t}$ où k est un réel quelconque.

Or $f(0) = 1,3$ donc $k\,\mathrm{e}^{0} = 1,3$ et donc $k = 1,3$.

On a donc, pour tout réel t de $[0\,;\,+\infty[$, $f(t) = 1,3\,\mathrm{e}^{-0,4t}$.

b. $f(t) = 1,3\,\mathrm{e}^{-0,4t}$ donc $f'(t) = 1,3 \times (-0,4)\,\mathrm{e}^{-0,4t} = -0,52\,\mathrm{e}^{-0,4t}$;

$f'(t) < 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Ce résultat est cohérent avec la situation étudiée car la concentration du composant diminue avec le temps.

c. La concentration du composant est inférieure à $0,3\,\mathrm{g\cdot L^{-1}}$ pour t tel que $f(t) < 0,3$; on résout cette inéquation :

$f(t) < 0{,}3 \iff 1{,}3\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} < 0{,}3 \iff \mathrm{e}^{-0{,}4t} < \dfrac{0{,}3}{1{,}3} \iff -0{,}4t < \ln\left(\dfrac{0{,}3}{1{,}3}\right) \iff$

$t > \dfrac{\ln\left(\frac{0{,}3}{1{,}3}\right)}{-0{,}4}$. Or $\dfrac{\ln\left(\frac{0{,}3}{1{,}3}\right)}{-0{,}4} \approx 3{,}666$ heures ; comme $0{,}666 = \dfrac{66{,}6}{100} \approx \dfrac{40}{60}$ donc 0,666 heure correspond à 40 minutes.

La concentration du composant est inférieure à $0{,}3\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1}$ au bout de 3 heures 40 minutes.

Annexe de l'exercice 4, question 2.c.

À rendre avec la copie

Représentation graphique $\mathscr{C}_g$ de la fonction g