Corrigé du baccalauréat STL Biotechnologies 18 juin 2014
Antilles-Guyane

EXERCICE 1 **7 points**

Des scientifiques étudient la croissance de plants de tomates d'une variété donnée après plantation. Ils ont établi que la hauteur des plants en centimètres peut être modélisée en fonction du temps par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{120}{5\mathrm{e}^{-0,08t}+1}$$

où t est le temps en jours après le jour de plantation.

PARTIE A : ÉTUDE DE LA FONCTION *f*

1. Calculons la hauteur des plants le jour où ils sont plantés, c'est-à-dire $f(0)$.

$f(0) = \dfrac{120}{5\mathrm{e}^{-0,08\times 0}+1} = \dfrac{120}{5+1} = 20.$

Les plants ont 20 cm le jour de leur plantation.

2. **a.** Déterminons $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{120}{5\mathrm{e}^{-0,08t}+1} = \lim_{t\to+\infty} 120 \times \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{5\mathrm{e}^{-0,08t}+1} = 120 \times \frac{1}{5\times 0+1} = 120$$

(puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,08t} = 0$).

b. La courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = 120$ comme asymptote au voisinage de l'infini puisque f admet une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$.

Cette asymptote est tracée ci-dessous.

(*échelle : 1 unité pour 10 jours en abscisse et 1 unité pour 10*cm *en ordonnée. L'unité choisie est le centimètre.)*

c. Nous pouvons traduire cela en affirmant qu'à partir d'une certaine date nous ne pouvons plus constater la croissance d'un plant. Le plant aura une taille maximale de 120 cm.

3. Calculons la dérivée de f.

$f = 120 \times \dfrac{1}{v}$ où $v(t) = 5\mathrm{e}^{-0,08t}+1$.

Par conséquent $f' = 120 \times \dfrac{-v'}{v^2}$ et $v'(t) = 5\times\left(-0,08\mathrm{e}^{-0,08t}\right) = -0,4\mathrm{e}^{-0,08t}$.

Il en résulte $f'(t) = 120 \times \dfrac{-(-0,4\mathrm{e}^{-0,08t})}{(5\mathrm{e}^{-0,08t}+1)^2}$ ou en simplifiant $f'(t) = \dfrac{48\mathrm{e}^{-0,08t}}{(5\mathrm{e}^{-0,08t}+1)^2}$.

Nous obtenons bien ce qu'il fallait montrer.

4. Étudions le signe de f' sur $[0\,;\,+\infty[$.

Pour tout t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, $f'(t)$ est strictement positif comme somme, produit et quotient de nombres strictement positifs.

5. Étudions le sens de variation de f.

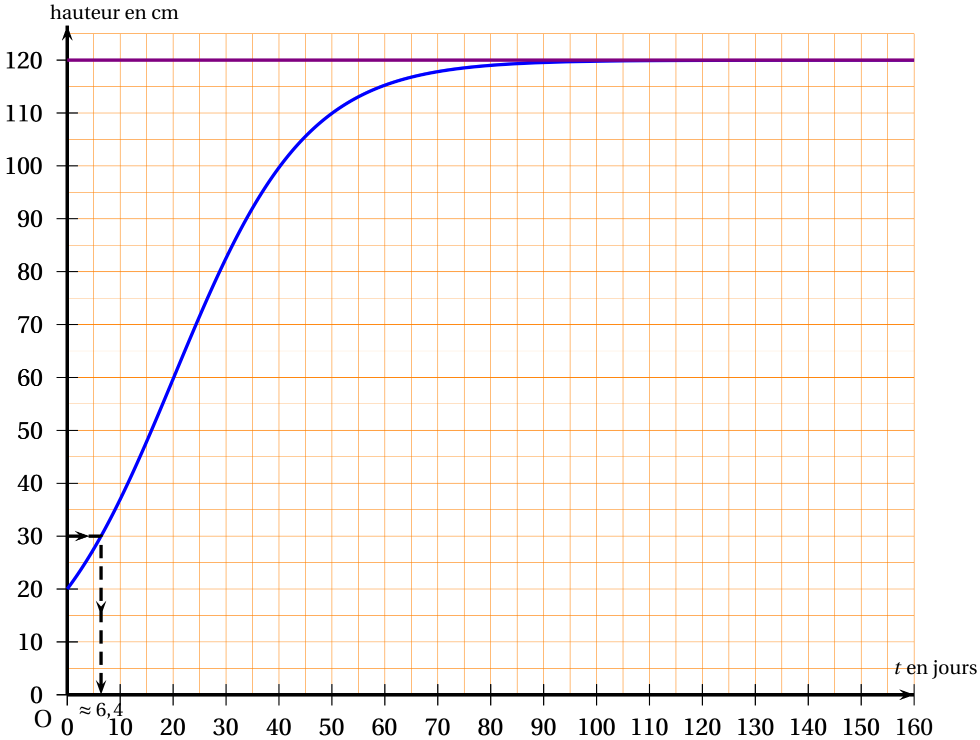
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I. Sur $[0\,;\,+\infty[$, f' étant strictement positive, f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

Dressons alors le tableau de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		+	
Variation de f	20	$\nearrow$	120

6. Le tableau de valeurs de la fonction f est complété sur celui donné en **Annexe 1**.

7. La courbe représentative de f est tracée dans le repère précédent.



PARTIE B : EXPLOITATION

1. L'inéquation permettant de déterminer au bout de combien de jours le plant mesurera plus de 30 cm de haut est $f(t) > 30$.

2. Résolvons cette inéquation

$$\begin{aligned}
\frac{120}{5\mathrm{e}^{-0,08t}+1} &> 30 \\
\frac{4}{5\mathrm{e}^{-0,08t}+1} &> 1 \quad \text{division par 30}\\
5\mathrm{e}^{-0,08t}+1 &< 4\\
\mathrm{e}^{-0,08t} &< \frac{3}{5}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{0,08t} &> \frac{5}{3} \quad \text{passage à l'inverse}\\
0,08t &> \ln\frac{5}{3} \quad \ln \text{ strictement croissante sur }]0\,;\,+\infty[\\
t &> \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{0,08}
\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{0,08} \approx 6,385.$

À partir d'environ sept jours, le plant aura atteint une hauteur de plus de 30 cm.

3. Pour retrouver le résultat du **2.**, nous allons chercher la valeur pour laquelle $f(t) = 30$.

   Cette solution sera la plus petite valeur de t à partir de laquelle le plant dépassera 30 cm.

   En utilisant

   - la courbe représentative de f. Nous lisons l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y = 30$ avec la courbe. Nous obtenons environ 6,4.
   - la calculatrice. Nous dressons la table des valeurs de la fonction f en utilisant un pas de 0,1. Pour 6,3 nous obtenons 29,85 valeur inférieure à 30. Pour 6,4 nous obtenons 30,03 valeur supérieure à 30. La solution est entre ces deux valeurs 6,3 et 6,4.

PARTIE C : ALGORITHME

Initialisations
t prend la valeur 0
f prend la valeur 20

Traitement
Tant que $f < 30$
  t prend la valeur $t+1$
  f prend la valeur $\dfrac{120}{5\text{e}^{-0,08t}+1}$
Fin Tant que

Sortie
Afficher t

1. L'entrée dans la boucle **Tant que** de cet algorithme dépend d'une condition. Elle se fait lorsque f est strictement inférieure à 30 et la sortie lorsque f est au moins égal à 30.
2. Les trois premières valeurs de la variable t sont 0, 1 et 2. Nous obtenons pour les valeurs correspondantes de la variable f, respectivement 20, 21 et 23 (*les résultats étant arrondis à l'unité*).
3. La valeur de t affichée à la fin de l'algorithme est 7. Cette valeur représente concrètement le nombre de jours qu'il faut attendre pour que le plant dépasse 30 cm.

EXERCICE 2 **3 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x\ln(x) + x$.
La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de cette fonction dans un repère orthonormé est donnée en **Annexe 2**.

1. La fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = x^2\ln(x)$ est une primitive de f lorsque $F' = f$.

$$F'(x) = 2x\ln(x) + x^2 \times \left(\frac{1}{x}\right) = 2x\ln x + x = f(x).$$

   F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. Calculons $A = \displaystyle\int_1^2 (2x\ln(x) + x)\,\text{d}x$

$$A = \left[x^2\ln x\right]_1^2 = 2^2\ln 2 - \left(1^2\ln 1\right) = 4\ln 2.$$

   $A = 4\ln 2 \approx 2{,}77$.

3. Sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ f est strictement positive, par conséquent cette intégrale correspond sur le graphique de l'**Annexe 2** à l'aire du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

   Ce domaine est hachuré sur le graphique de l'annexe 2.

EXERCICE 3 **6 points**

Dans cet exercice, les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Production de l'antibiotique spiramycine.

L'espèce *Streptomyces ambofaciens* a été sélectionnée pour sa production de spiramycine. Cet antibiotique est obtenu par la fermentation de la *Streptomyces ambofaciens* en bioréacteur.
Afin de prévoir au mieux la production de cet antibiotique, on cherche le développement de la *Streptomyces ambofaciens* dans le bioréacteur.

PARTIE A :

À $t = 0$ heure, la concentration de *Streptomyces ambofaciens* est mesuré à 3,10 g/l. Puis, à $t = 1$ h, elle est mesurée à 3,22 g/l. En conséquence dans cette partie, on suppose que la concentration augmente de 4 % par heure.

On note : c_0 la concentration au temps $t = 0$, et $c_0 = 3,10$.
c_1 la concentration au temps $t = 1$
...
c_n la concentration au temps $t = n$

Tous les résultats de cette partie sont arrondis au centième.

1. À une augmentation de 4 % correspond un coefficient multiplicateur de $1+\frac{4}{100}$ soit 1,04.
$c_1 = 3{,}10 \times 1{,}04 \approx 3{,}22$, $c_2 = 3{,}22 \times 1{,}04 \approx 3{,}35$ et $c_3 = 3{,}35 \times 1{,}04 \approx 3{,}48$.

2. $c_{n+1} = c_n \times 1{,}04$.

3. La suite (c_n) est par définition une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme 3,10.

4. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times (q)^n$.
$c_n = 3{,}10 \times (1{,}04)^n$.

5. Si la fermentation se produit pendant 24 heures, la concentration *Streptomyces ambofaciens* au bout de 24 h est c_{24}. $c_{24} = 3{,}10 \times (1{,}04)^{24} \approx 7{,}95$.
La concentration de *Streptomyces ambofaciens* au bout de 24 h est d'environ 7,95 g/l.

PARTIE B :

Après 24 h le milieu est renouvelé au sein du bioréacteur, à partir de ce moment on obtient le relevé suivant :

Heures	24	29	32	34	36	38	40
Rang de l'heure : x_i	0	5	8	10	12	14	16
Concentration de *Streptomyces ambofaciens* : y_i	7,95	11,05	12,05	13,45	14,15	15,45	16,75

1. Dans un repère orthogonal, construisons le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$. En abscisse, pour le rang de l'heure, on prendra comme échelle 1 cm pour 2 heures et en ordonnée 1 cm pour 2 g/l; on positionnera l'intersection des axes de coordonnées au point de coordonnées (0; 7).

2. Calculons les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Les coordonnées de G sont $\left(\overline{x}\ ;\ \overline{y}\right)$.

$$\overline{x_G} = \frac{0+5+\cdots+14+16}{7} \approx 9{,}3 \quad \overline{y_G} = \frac{7{,}95+11{,}05+\cdots+15{,}45+16{,}75}{7} \approx 13{,}0$$

G(9,3 ; 13,0) est placé sur le graphique précédent.

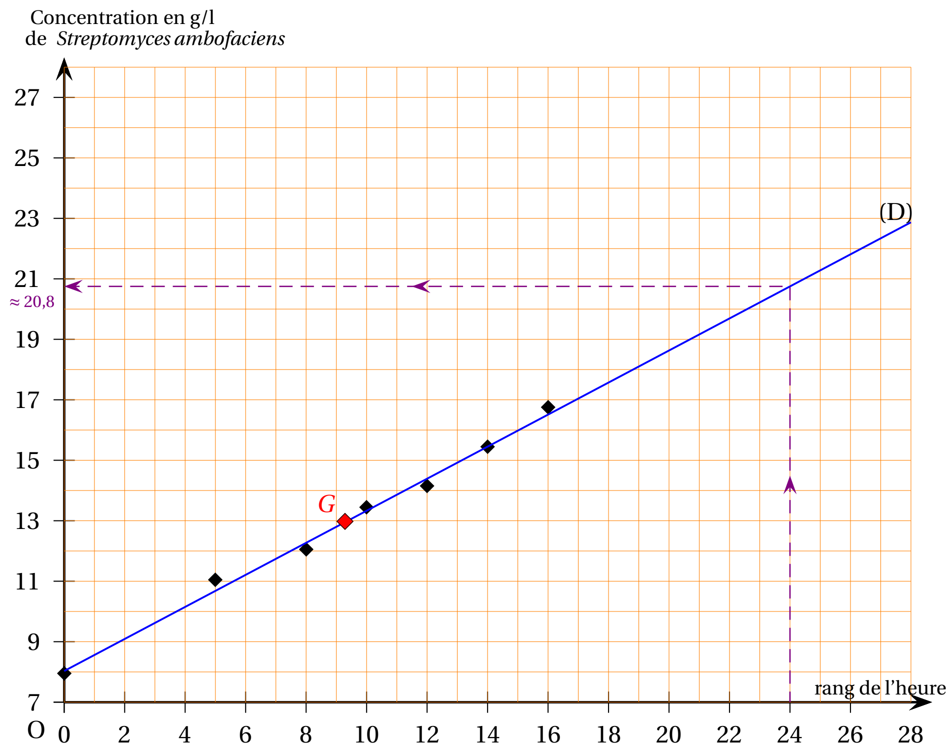
3. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés est $y = 0{,}53x + 8{,}03$. *Les coefficients sont arrondis à* 10^{-2} *près.*

4. On décide d'ajuster le nuage avec la droite (D) d'équation $y = 0,53x + 8,03$.

a. La droite (D) est tracée dans le repère précédent.

b. En utilisant cet ajustement affine, une estimation par une méthode graphique de la concentration de *Streptomyces ambofaciens* au bout de 48 h sera l'ordonnée du point de (D) d'abscisse 24, rang de l'heure correspondant à 48. Nous lisons environ 20,8. Au bout de 48 h, la concentration sera d'environ 20,8 g/l.

c. Pour déterminer à partir de quelle heure la concentration de *Streptomyces ambofaciens* dépassera 30 g/l, résolvons $0{,}53x + 8{,}03 = 30$.
$0{,}53x + 8{,}03 = 30 \iff 0{,}53x = 30 - 8{,}03 \iff x = \dfrac{30-8{,}03}{0{,}53} \approx 41{,}45.$
À partir de 66 h, la concentration de *Streptomyces ambofaciens* dépassera 30 g/l.



EXERCICE 4 **4 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

PARTIE A :

Une entreprise agroalimentaire dispose d'un parc de machines d'ensachage toutes identiques.
La durée de vie en année d'une machine d'ensachage est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On rappelle que : $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$
Sur l'**Annexe 3**, on donne la courbe de la fonction représentative f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. Caractérisation de la loi.

   a. Graphiquement sur l'**Annexe 3** la probabilité $P(X > 20)$ est l'aire du domaine limité par la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 20$.

   b. Pour déduire du graphique la valeur de λ, nous lisons la valeur de $f(0)$ soit 0,1.

Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,1$.

2. La probabilité qu'une machine d'ensachage tombe en panne entre la dixième et la vingtième année est

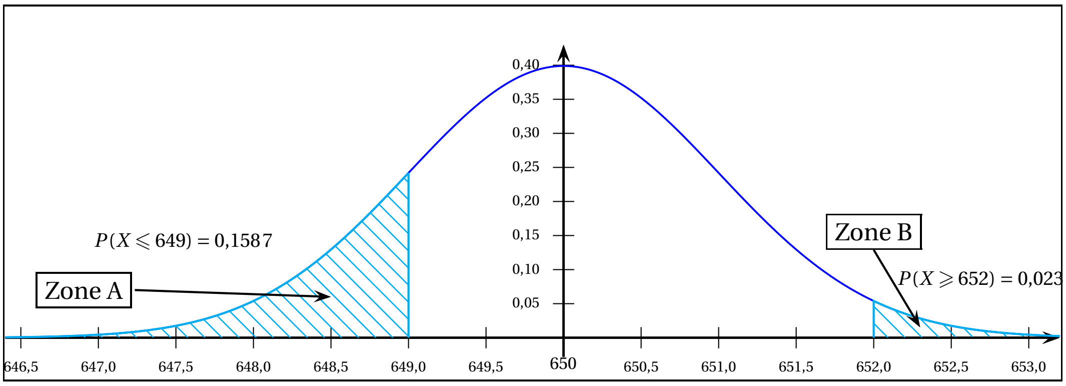
   $P(10 < X \leqslant 20)$.

$$\begin{aligned}
P(10 < X \leqslant 20) &= P(X \leqslant 20) - P(X \leqslant 10)\\
&= 1 - \mathrm{e}^{-0,1\times 20} - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,1\times 10}\right)\\
&= 1 - \mathrm{e}^{-2} - \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)\\
&= \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}\\
&\approx\ 0,233
\end{aligned}$$

PARTIE B :

L'entreprise lance une production de paquets de préparation pour pancakes. Les paquets doivent contenir 650 g de préparation. On considère qu'un paquet est commercialisable s'il contient entre 648 g et 652 g.
On considère que la quantité Q, exprimée en grammes (g), de préparation réellement introduite dans les paquets par une machine d'ensachage suit une loi normale d'espérance $\mu = 650$ et d'écart-type $\sigma = 1$.

A l'aide d'un logiciel, on obtient les résultats suivants :



1. Déterminons la probabilité qu'un paquet de préparation pour pancakes pris au hasard dans la production a pour masse entre 649 g et 652 g c'est-à-dire $P(649 < X < 652)$.

   $P(649 < X < 652) = 1 - (P(X \leqslant 649) + P(X \geqslant 652))$.

   En utilisant les renseignements fournis sur le graphique

   $P(649 < X < 652) = 1 - (0{,}1587 + 0{,}023) = 0{,}8183$.

2. Calculons la probabilité qu'un paquet de préparation pour pancakes pris au hasard dans la production a pour masse moins de 648 g. En utilisant la calculatrice, $P(X < 648) = 0{,}023$.

   remarque : La courbe étant symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, $P(x \leqslant \mu - t) = P(X \geqslant \mu + t)$.
   Par conséquent $P(X \leqslant 650 - 2) = P(X \geqslant 650 + 2)$. Or nous avons $P(X \geqslant 650 + 2) = 0{,}023$, d'où le résultat.

PARTIE C :

Les réglages de la machine d'ensachage ont été modifiés dans l'objectif d'obtenir une proportion $p = 97\,\%$ de paquets de préparation commercialisables. Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un premier échantillon de 400 paquets fabriqués.

1. En supposant que cet objectif a été atteint déterminons un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de paquets de préparation commercialisables dans un échantillon de taille 400.

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$\left[0{,}97 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}97(1-0{,}97)}{400}}\ ;\ 0{,}97 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}97(1-0{,}97)}{400}})\right] \approx [0{,}9532\ ;\ 0{,}9867]$$

2. Parmi les 400 paquets de l'échantillon, 381 sont commercialisables soit une proportion de $\dfrac{381}{400} \approx 0{,}9525$.
   Cette valeur n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, nous pouvons estimer au seuil de 95 % que l'objectif n'a pas été atteint.

ANNEXE 1 À rendre avec la copie

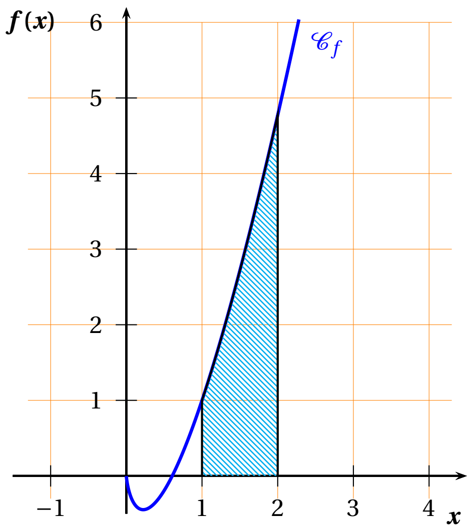
EXERCICE 1 : Tableau de valeurs de la fonction f

t	0	10	20	30	40	50	60
$f(t)$	20	37,0	59,7	82,6	100,0	110,0	115,2

Les résultats sont arrondis à 10^{-1} près

ANNEXE 2 À rendre avec la copie

EXERCICE 2 : Courbe représentative de la fonction f



ANNEXE 3 À rendre avec la copie

EXERCICE 4 : Courbe représentative de la fonction f